Corrigé du DM n° 8

Correction 1.

1. Pour $x \leqslant 0$, $\frac{x^2+2|x|}{x} = \frac{x^2-2x}{x} = x-2$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} x-2 = \underline{-\infty}$.

2. $\star$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -3x+2 = +\infty$

$\star$ $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Donc par composition, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-3x+2} = +\infty}$.

3. $$\frac{x^3-e^x}{x^2+3x+1} = \frac{e^x\left(\frac{x^3}{e^x}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{\frac{x^3}{e^x}-1}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

$\star$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ par théorème des croissances comparées.

$\star$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ par théorème des croissances comparées donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - 1 = -1$

et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} = 1$

Donc par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{e^x}-1}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1$.

$\star$ Donc par produit, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-e^x}{x^2+3x+1} = -\infty}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-3 \leqslant 3\cos(x) \leqslant 3$

Donc $-3+x \leqslant 3\cos(x)+x \leqslant 3+x$

De plus, pour $x \neq 0$, $x^2 > 0$ donc $\frac{-3+x}{x^2} \leqslant \frac{3\cos(x)+x}{x^2} \leqslant \frac{3+x}{x^2}$

Or $\frac{3+x}{x^2} = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$ donc par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3+x}{x^2} = 0$, et de même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-3+x}{x^2} = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3\cos(x)+x}{x^2} = 0}$.

5. Même principe, $-1 \leqslant -\cos(x) \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 2-\cos(x) \leqslant 3$

Ces trois nombres sont strictement positifs donc en appliquant la fonction inverse décroissante sur $]0,+\infty[$, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2-\cos(x)} \leqslant 1$.

Pour $x > 0$, $x+1 > 0$ donc en particulier $\frac{x+1}{3} \leqslant \frac{x+1}{2-\cos(x)}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{3} = +\infty$.

Pour par théorème de comparaison, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2-\cos(x)} = +\infty}$.

6. $$\begin{aligned}\sqrt{4x^2-x+1}-2x &= \frac{(\sqrt{4x^2-x+1}-2x)(\sqrt{4x^2-x+1}+2x)}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x}\\ &= \frac{4x^2-x+1-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x}\\ &= \frac{-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x}\end{aligned}$$

Or pour $x > 0$, $\sqrt{4x^2-x+1}+2x = \sqrt{4x^2(1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2})}+2x = 2x\left(\sqrt{1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}}+1\right)$.

Donc $\sqrt{4x^2-x+1}-2x = \dfrac{x(-1+\frac{1}{x})}{2x(\sqrt{1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}})+1} = \dfrac{-1+\frac{1}{x}}{2(\sqrt{1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}})+1)}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^2} = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-x+1}-2x = -\frac{1}{4}}$.

Correction 2. Réponses.

(a) $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

(b) $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

on cherche le SIGNE de la dérivée ! Résoudre $f'(x) = 0$ ne permet pas de trouver les « + » et les « - ».

(c) $f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3

(d) $f'(x) = 6(x^2 + 2x - 3)e^{2x^3+6x^2-18x+3}$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{57}	$\searrow$	e^{-7}	$\nearrow$	$+\infty$

(e) $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(f) $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 3.

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$.
Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.
Donc $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est symétrique par rapport à l'origine}}$.

2. Pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ donc $f'(x) = \frac{1(1+x)-x\times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$.
Donc pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
De plus, $f(0) = 0$ et pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{1}{\frac{1}{x}+1}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Donc, en utilisant l'imparité de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

3. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc d'après le tableau des variations
$\boxed{f \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]-1;1[}$.

4. Pour $y \in [0, 1[$, on voit d'après le tableau des variations que son antécédent x est dans $[0, +\infty[$.
Donc pour $y \in [0, 1[$ et $x \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x}{1+x} = y \\ &\iff x = y(x+1) \\ &\iff x = yx + y \\ &\iff x(1-y) = y \\ &\iff x = \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

Donc pour $y \in [0, 1[$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$.
Pour $y \in]-1, 0[$, l'antécédent est dans $]-1; 0[$.
Donc pour $y \in]-1; 0[$ et $x \in]-\infty, 0[$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x}{1-x} = y \\ &\iff \dots \\ &\iff x = \frac{y}{1+y} \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour } y \in]-1; 1[, \ f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}}$.