

DEVOIR MAISON N°7

pour Mardi 4 novembre, 10h

Attention il y a une erreur dans l'exercice 6 ! Ci-dessous la version corrigée.

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

On appelle E l'ensemble des élèves de la classe de TSI2.1, et n est l'application de E dans $\llbracket 0; 20 \rrbracket$ qui à un élève associe sa note au dernier DS de maths.

1. Donner l'écriture symbolique des propositions suivantes.

Par exemple, pour la phrase « Au moins un élève a 10 ou moins que 10. », cela peut donner $\exists e \in E, n(e) \leq 10$.

- | | |
|--|--|
| <p>(a) Au moins un élève a 10 ou plus de 10.</p> <p>(b) Tous les élèves ont 10 ou plus.</p> <p>(c) Aucun élève n'a dépassé 10.</p> | <p>(d) Nathan M. a eu la meilleure note.</p> <p>(e) Aucun élève n'a eu la même note que Ethan.</p> <p>(f) Un seul élève a eu 17.</p> |
|--|--|
2. Donner la négation de chacune des propositions précédentes, en français, et en écriture symbolique. (écriture symbolique facultative pour la négation de la (f)).
3. Parmi toutes les propositions précédentes, en trouver deux qui ont un lien d'implication (*préciser le sens de l'implication*).

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

(a) $E = \{a\}$ ★(b) $E = \{b, c\}$.

Exercice 3.

1. Pour chacune des deux fonctions, déterminer $f(\llbracket -2, 3 \rrbracket)$ et $f^{-1}(\llbracket 0, 4 \rrbracket)$.

f est-elle injective ? surjective ? si elle est bijective, préciser sa réciproque.

(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ $n \mapsto n^2$	(b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $n \mapsto -n + 3$	(c) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $n \mapsto 3n + 2$
---	--	--

2. On définit $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$x \mapsto \frac{x+2}{3-x}$$

Montrer que l'application g est une bijection, et déterminer sa réciproque.

Exercice 4.

Dans une base orthonormée directe, on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

2. Déterminer un vecteur \vec{w} tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthogonale directe de l'espace.

3. Comment transformer cette base pour obtenir une base orthonormale directe ?

Exercice 5.

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $|3x + 2| = 3$
2. $|-4x + 1| \leq 3$
3. $|2x + 3| \geq 2$
4. $-2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 < 0$
(commencer par factoriser le polynôme)
5. $\frac{4x^2 - 4x + 1}{-2(3x + 1)(x - 3)} \leq 0$

CALCULS

Traiter (au moins) un exercice au choix.

Exercice 6. Factorisation.

Factoriser sous la forme $(ax + b)(cx + d)$ les expressions suivantes :

- (a) $-(2x - 1)(3x + 4) + x(2x - 1)$
- (b) $(x + 3)^2 + 2(x + 3)(3x - 1)$
- (c) $(x - 7)(3x - 15) + 2(x - 5)(3x - 12)$
- (d) $-(6x + 7)(5x - 1) + 36x^2 - 49$
- (e) $25 - (10x + 3)^2$
- (f) $(x + 1)(-x + 3) + x^2 + 2x + 1$
- (g) $3(6x - 8)(4x - 5) + 3x - 4$
- (h) $(-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$

Exercice 7. Fractions.

Exprimer les termes suivants sous forme d'une seule fraction, simplifie au maximum.

- (a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{5}{6}$
- (b) $\frac{\frac{1}{4} + 5}{\frac{2}{3}}$
- (c) $\frac{-\frac{3}{2} + \frac{9}{4}}{2}$
- (d) $\frac{2}{21} - \frac{3}{7} + \frac{16}{9}$
- (e) $\frac{2 - 3 \times \frac{5}{7}}{\frac{20}{21}}$
- (f) $27 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)$
- (g) $3 + 5 \frac{\frac{7}{2} - 2}{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}}$
- (h) $\frac{\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \left(2 + \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{4} - 3}$

Exercice 8. Racines carrées et développements.

Simplifier autant que possible les expressions suivantes.

- (a) $(2\sqrt{5})^2$
- (b) $(2 + \sqrt{5})^2$
- (c) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$
- (d) $\left(\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$
- (e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$
- (f) $(3 + \sqrt{7})^2 + (3 - \sqrt{7})^2$
- (g) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}$
- (h) $\sqrt{(1 + \sqrt{7})^2 + (1 - \sqrt{7})^2}$
- ★ (i) $\sqrt{(a + b)^2 - 4ab}$