

DEVOIR MAISON N° 7

pour mardi 3 novembre 10h54

* Exercice 0. facultatif.

F , G et H sont trois ensembles, on considère une application f de F dans G et une application g de G dans H . Montrer que :

1. $g \circ f$ injective $\implies f$ injective.
2. $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.

Indication/rappel : pour montrer que $A \implies B$, on commence par « Supposons que A soit vraie, montrons qu'alors, B est vraie. »

Exercice 1.

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité, puis étudier les variations :

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$
2. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
4. $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

Exercice 2.

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|---|--|
| <p>(a) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$</p> <p>(b) $5x^2 - 8x + 3 \geq -\frac{1}{5}$</p> <p>(c) $-x^2 + 2x - 1 > 1$</p> <p>(d) $\frac{x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}}{x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}} \leq 0$</p> | <p>(e) $(-x^2 - 20x - 100)(3x^2 + 6x - 3) > 0$</p> <p>(f) $(2 - 2x^2)(4x^2 - 8x + 4) \leq 0$</p> <p>(g) $1 + x > \frac{1}{x}$</p> <p>(h) $\frac{x}{x-2} - \frac{x+8}{x+2} \leq \frac{16}{x^2-4}$</p> |
|---|--|

Exercice 3.

On note g la fonction valeur absolue.

Déterminer $g^{-1}([2; 4])$, $g^{-1}(\llbracket -1; 3 \rrbracket)$, $g(\llbracket -1; 2 \rrbracket)$ et enfin $g^{-1}(g(\llbracket -1; 3 \rrbracket))$.

Exercice 4.

Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

En cas de bijectivité, déterminer la réciproque.

1. $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
2. $g: \mathbb{C} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}$
 $z \mapsto \frac{iz - i}{z + 3}$
3. $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto n + 1$

Exercice 5.

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F .

On note A et B deux parties de F .

1. Écrire la définition de $f^{-1}(A)$.
2. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Rappel : pour montrer une égalité d'ensembles, on procède par double inclusion, la méthode est dans le cours sur les ensembles. On pourra aussi utiliser la correction de l'exercice 4 sur les applications. L'essentiel est d'oser commencer!

Traiter au choix l'un des deux exercices suivants.

L'exercice 6 est plus calculatoire, l'exercice 7 demande un peu plus de réflexion.

Exercice 6.

- Soit $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 32x - 13$.
 - Calculer $P(\frac{1}{2})$.
 - En déduire toutes les racines de P , réelles ou complexes.
- Soit $Q(x) = 2x^4 + 4x^2 - 30$.
 - Résoudre $2X^2 + 4X - 30 = 0$.
 - En déduire toutes les racines de Q , réelles ou complexes.
- Déterminer la forme trigonométrique (exponentielle) des nombres complexes suivants :
 $z_1 = (-1 - i)^{15}$ $z_2 = \left(\frac{i}{\sqrt{3-i}}\right)^2$ $z_3 = -6 + 2i\sqrt{3}$ $z_4 = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 7.

On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit $z_1 = a + b + c$, $z_2 = a + bj + cj^2$ et $z_3 = a + bj^2 + cj$.

- Justifier que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^3 = 1$.
- Déterminer les parties réelles et imaginaires de z_1 , z_2 et z_3 en fonction de a , b et c .
- Montrer que z_1 , z_2 et z_3 sont réels si et seulement si $b = c$.
- À quelle condition sur a , b et c , les nombres z_1 , z_2 et z_3 sont-ils égaux ?
En particulier, que valent a , b et c pour avoir $z_1 = z_2 = z_3 = 1$?
- Pour quelles valeurs de a , b et c a-t-on $\{z_1, z_2, z_3\} = \{0, 1\}$?

CONSEILS POUR LES VACANCES.

Ce devoir est un peu long mais permet de bien (re)travailler les notions abordées en ce début d'année.

C'est l'occasion d'aller chercher dans le cours pour retrouver et apprendre les définitions, théorèmes et propriétés qui pourraient être utiles.

Il peut être une base de travail pour se remettre à jour.

Les vacances sont aussi le moment de faire le point sur l'organisation du travail, les méthodes d'apprentissage ...

Les résultats que vous avez obtenus étaient-ils décevants par rapport au travail effectué ?

Évaluez, testez différentes méthodes : faire des fiches (résumé de cours, erreurs à ne pas refaire, quelques formules en vrac qui sont difficiles à retenir, méthodes pour certains exercices ...), lire et relire le cours ou les fiches, écrire au brouillon plusieurs fois pour retenir, se poser des questions oralement, utiliser les fiches ANKI (oralement, ou en écrivant au brouillon), refaire les exemples du cours, refaire certains exercices, essayer de comprendre les erreurs faites au cours d'un devoir ...

Mais il est essentiel avant tout de prendre du temps de détente et de repos !