

DÉBUT DE DEVOIR MAISON N°7

pour Mardi 4 novembre, 10h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

On appelle E l'ensemble des élèves de la classe de TSI2.1, et n est l'application de E dans $\llbracket 0; 20 \rrbracket$ qui à un élève associe sa note au dernier DS de maths.

1. Donner l'écriture symbolique des propositions suivantes.

Par exemple, pour la phrase « Au moins un élève a 10 ou moins que 10. », cela peut donner $\exists e \in E, n(e) \leq 10$.

- | | |
|---|---|
| <p>(a) Au moins un élève a 10 ou plus de 10.</p> <p>(b) Tous les élèves ont 10 ou plus.</p> <p>(c) Aucun élève n'a dépassé 10.</p> | <p>(d) Nathan M. a eu la meilleure note.</p> <p>(e) Aucun élève n'a eu la même note que Ethan.</p> <p>(f) Un seul élève a eu 17.</p> |
|---|---|

2. Donner la négation de chacune des propositions précédentes, en français, et en écriture symbolique. (écriture symbolique facultative pour la négation de la **(f)**).

3. Parmi toutes les propositions précédentes, en trouver deux qui ont un lien d'implication.

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

- (a)** $E = \{a\}$ ★**(b)** $E = \{b, c\}$.

Exercice 3.

Pour chacune des deux fonctions, déterminer $f(\llbracket -2, 3 \rrbracket)$ et $f^{-1}(\llbracket 0, 4 \rrbracket)$.

f est-elle injective ? surjective ? si elle est bijective, préciser sa réciproque.

- | | | |
|---|--|--|
| <p>(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto n^2$</p> | <p>(b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
$n \mapsto -n + 3$</p> | <p>(c) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
$n \mapsto 3n + 2$</p> |
|---|--|--|

Exercice 4.

Dans une base orthonormée directe, on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que ces deux vecteurs sont orthogonaux.
- Déterminer un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthogonale directe de l'espace.
- Comment transformer cette base pour obtenir une base orthonormale directe ?

Exercice 5.

Exercice 6.

CALCULS

Traiter (au moins) un exercice au choix.

Exercice 7. Factorisation.

Factoriser sous la forme $(ax + b)(cx + d)$ les expressions suivantes :

(a) $-(2x - 1)(3x + 4) + x(2x - 1)$

(e) $25 - (10x + 3)^2$

(b) $(x + 3)^2 + 2(x + 3)(3x - 1)$

(f) $(2x + 1)(-x + 3) + x^2 + 2x + 1$

(c) $(x - 7)(3x - 15) + 2(x - 5)(3x - 12)$

(g) $3(6x - 8)(4x - 5) + 3x - 4$

(d) $-(6x + 7)(5x - 1) + 36x^2 - 49$

(h) $(-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$

Exercice 8. Fractions.

Exprimer les termes suivants sous forme d'une seule fraction, simplifiée au maximum.

(a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

(d) $\frac{2}{21} - \frac{3}{7} + \frac{16}{9}$

(g) $3 + 5 \frac{\frac{7}{2} - 2}{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}}$

(b) $\frac{\frac{1}{4} + 5}{\frac{2}{3}}$

(e) $\frac{2 - 3 \times \frac{5}{7}}{\frac{20}{21}}$

(h) $\frac{\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)\left(2 + \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{4} - 3}$

(c) $\frac{-\frac{3}{2} + \frac{9}{4}}{2}$

(f) $27 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)$

Exercice 9. Racines carrées et développements.

Simplifier autant que possible les expressions suivantes.

(a) $(2\sqrt{5})^2$

(f) $(3 + \sqrt{7})^2 + (3 - \sqrt{7})^2$

(b) $(2 + \sqrt{5})^2$

(g) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}$

(c) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

(h) $\sqrt{(1 + \sqrt{7})^2} + (1 - \sqrt{7})^2$

(d) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

★ (i) $\sqrt{(a + b)^2 - 4ab}$

(e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$