Corrigé du DM n°7

Correction 1.

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\pi - \frac{9\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{10}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ &= \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Correction 2.

$$\begin{aligned} \vec{u}\,.\,\vec{\imath} &= \left((\vec{\imath}\,.\,\vec{k})\vec{\jmath} - (\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath})\vec{k}\right).\,\vec{\imath} \\ &= (\vec{\imath}\,.\,\vec{k})(\vec{\jmath}\,.\,\vec{\imath}) - (\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath})(\vec{k}\,.\,\vec{\imath}) \\ &= (\vec{\imath}\,.\,\vec{k})(\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath}) - (\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath})(\vec{\imath}\,.\,\vec{k}) \quad \text{car le produit scalaire est symétrique} \\ &= 0 \qquad \text{car le produit des nombres est commutatif} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{\imath} \text{ sont orthogonaux}}$.

Correction 3.

- Pour f : $A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
  On cherche φ :
  $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ donc on peut prendre $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.
  Or $\sin(\varphi) = -\frac{3}{2\sqrt{3}} < 0$ donc $\varphi < 0$ donc $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.
  Donc $\boxed{f(t) = 2\sqrt{3}\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)}$.
- Pour g : $A = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$
  On cherche φ tel que $\cos(\varphi) = 0$ et $\sin(\varphi) = 1$: on peut prendre $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
  Alors $\boxed{g(t) = 3\cos\left(\frac{t}{\pi} - \frac{\pi}{2}\right)}$.
  (*on peut aussi trouver ce résultat directement à partir des formules autour des angles associés*)

Correction 4.

1. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \cos(2x-1)$ et $v(x) = e^{3x+4} + 5$.
- ⋆ u est la composée d'un polynôme par le cosinus, les deux fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc u aussi.
- ⋆ $x \mapsto e^{3x+4}$ est la composée de deux fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et on ajoute la constante 5, donc v est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car pour tout x, $e^{3x+4} > 0$ donc $e^{3x+4} + 5 > 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, et $u'(x) = -2\sin(2x-1)$ et $v'(x) = 3e^{3x+4}$.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-2\sin(2x-1)(e^{3x+4}+5) - \cos(2x-1) \times 3e^{3x+4}}{(e^{3x+4}+5)^2} = \boxed{\frac{e^{3x+4}(\cos(2x-1) - 2\sin(2x-1)) - 10\sin(2x-1)}{(e^{3x+4}+5)^2}}.$$

2. f est la somme d'un polynôme et de la fonction $x \mapsto -5 \times \frac{1}{x^4}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ et $\boxed{f'(x) = 5x^4 - 8x + 2 + \frac{20}{x^5}}$.

3. $f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=3x+5$.
u est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est définie partout où $u(x)\geqslant 0$ et f est dérivable partout où $u(x)>0$.
Or $u(x)>0 \iff 3x+5>0 \iff 3x>-5 \iff x>-\frac{5}{3}$
Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } [-\frac{5}{3},+\infty[\text{ et dérivable sur }]-\frac{5}{3},+\infty[}$.
Et $\sqrt{u}'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $\boxed{f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+5}}}$.

4. $f=u^3$ avec $u(x)=\frac{3x+4}{2x^2+5x-12}$.
u est une fraction rationnelle, on résout $2x^2+5x-12=0$
$\Delta=5^2-4\times 2\times(-12)=25+96=121$ donc $x_1=\frac{-5-11}{2\times 2}=-4$ et $x_2=\frac{-5+11}{2\times 2}=\frac{3}{2}$.
Or la fonction cube est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\left\{-4;\frac{3}{2}\right\}}$.
Et $u'(x)=\frac{3(2x^2+5x-12)-(3x+4)(4x+5)}{(2x^2+5x-12)^2}=\frac{6x^2+15x-36-12x^2-15x-16x-20}{(2x^2+5x-12)^2}=\frac{-6x^2-16x-56}{(2x^2+5x-12)^2}$.

Donc $\boxed{f'(x)=3\times\dfrac{-6x^2-16x-56}{(2x^2+5x-12)^2}\left(\dfrac{3x+4}{2x^2+5x-12}\right)^2}$.

Correction 5.

1. P,Q et R sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})=0$.
Or $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}3x-(2x+1)\\x-1-(x-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}2(x+1)-(2x+1)\\2x-3-(x-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x-1\end{pmatrix}$.
Donc $\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})=\begin{vmatrix}x-1&1\\1&x-1\end{vmatrix}=(x-1)(x-1)-1=x^2-2x=x(x-2)$
Donc $\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})=0\iff x(x-2)=0\iff x=0$ ou $x=2$.
Donc $\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés si et seulement } x=0 \text{ ou } x=2}$.

2. PQR est rectangle $\iff \widehat{PQR}=90°$ ou $\widehat{QRP}=90°$ ou $\widehat{RPQ}=90°$
$\iff \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR}=0$ ou $\overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{RP}=0$ ou $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PQ}=0$

- $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}1-x\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-x+2\\x-2\end{pmatrix}=(1-x)(-x+2)-(x-2)=x^2-3x+2-x+2=x^2-4x+4$
  Et $x^2-4x+4=(x-2)^2$, donc $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR}=0\iff x=2$.
- $\overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{RP}=\begin{pmatrix}x-2\\-x+2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\-x+1\end{pmatrix}=-x+2+x^2-3x+2=x^2-4x+4=(x-2)^2$
  Donc $\overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{RP}=0\iff x=2$.
- $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\x-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\1\end{pmatrix}=x-1+x-1=2x-2$
  Donc $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PQ}=0\iff x=1$.

Donc PQR est rectangle si et seulement si $x=1$ ou $x=2$.
Or on veut qu'il ne soit pas aplati, c'est-à-dire que les points ne soient pas alignés, donc $x\neq 2$.
Donc $\boxed{PQR \text{ est un triangle non aplati si et seulement si } x=1}$.

Correction 6.

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=1\times(-1)+(-1)\times 1+2\times 1=-1-1+2=0$ donc $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux}}$.

2. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ est une base orthogonale directe.
On prend donc $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2\\-(1+2)\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}$. $\boxed{\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}}$ convient.

$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$
$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
$\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
On pose $\boxed{\overrightarrow{u'} = \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w'} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\overrightarrow{w}}$.
Ces trois vecteurs ont la même direction et le même sens respectifs que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et ils sont de norme 1 donc ils forment une base orthonormée directe.

3. La base étant orthonormée directe, on peut obtenir les coordonnées sur chaque axe avec le produit scalaire.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\jmath} &= (\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{u'})\overrightarrow{u'} + (\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{v'})\overrightarrow{v'} + (\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{w'})\overrightarrow{w'} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{u'} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{v'} - \frac{3}{3\sqrt{2}}\overrightarrow{w'}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } \overrightarrow{w} \text{ dans } \mathcal{B}'' \text{ sont } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$.

Correction 7.

1.
- f est injective : soient n et n' dans $\mathbb{N}$, on suppose que $f(n) = f(n')$.
Alors $n^2 = n'^2$, donc $n = n'$ ou $n = -n'$.
Or n et n' sont des entiers naturels, donc positifs tous les deux donc $n = n'$.
Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.
- $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$. En effet, 3 est un entier naturel, qui n'a pas d'antécédent par f car $n^2 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.
- Donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$.

2. Montrons que g est bijective.
Soit y dans $\mathbb{Z}$, montrons que l'équation $g(n) = y$ a une unique solution dans $\mathbb{Z}$.
$g(n) = y \iff -n + 3 = y \iff -n = y - 3 \iff n = 3 - y$.
$y \in \mathbb{Z}$ donc $3 - y \in \mathbb{Z}$.
Donc $\boxed{g \text{ est bijective (donc injective et surjective) et } g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ y & \mapsto & 3-y \end{array}}$.

3.
- $h(1, 0) = 1 - 0 = 1$ et $h(3, 2) = 3 - 2 = 1$ donc $\boxed{h \text{ n'est pas injective}}$.
- Montrons que h est surjective : soit $y \in \mathbb{R}$, on remarque que $h(y, 0) = y - 0 = y$ donc $(y, 0)$ est un antécédent de y.
Donc tout nombre réel a un antécédent par h donc $\boxed{h \text{ est surjective}}$.
- $\boxed{h \text{ n'est pas bijective}}$.

4.
- $\boxed{k \text{ n'est pas injective}}$ car $k(-1) = \sqrt{4 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $k(1) = \sqrt{4 + 1^2} = \sqrt{5}$.
- Soit y dans $[2, +\infty[$, alors $y \geqslant 2$ donc $y^2 \geqslant 4$ donc $y^2 - 4 \geqslant 0$.
Donc on peut poser $x = \sqrt{y^2 - 4}$.
Alors $k(x) = \sqrt{4 + (y^2 - 4)} = \sqrt{y^2} = y$ car $y \geqslant 0$.
Donc y a un antécédent par k donc $\boxed{k \text{ est surjective}}$.
- Donc $\boxed{k \text{ n'est pas bijective}}$.

Correction 8.

Soit y dans $]-1, +\infty[$, on résout $f(x) = y$ en cherchant x dans $]2, +\infty[$.
$f(x) = y \iff x^2 - 4x + 3 = y \iff x^2 - 4x + (3 - y) = 0$
On cherche les racines de ce polynôme :
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (3 - y) = 16 - 12 + 4y = 4(1 + y)$

$y > -1$ donc $\Delta > 0$: les deux racines sont $x_1 = \frac{4-\sqrt{4(1+y)}}{2} = 2-\sqrt{1+y}$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{4(1+y)}}{2} = 2-\sqrt{1+y}$.
$x_1 > 2$ et $x_2 < 2$ donc y a un unique antécédent dans $]2,+\infty[$, c'est $2+\sqrt{1+y}$.
Donc $\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1}: \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to &]2,+\infty[\\ y & \mapsto & 2+\sqrt{1+y} \end{array}}$.

Correction 9.

1. Soit $y \in f(A)$, montrons que $y \in f(B)$.
$y \in f(A)$ donc il existe x dans A tel que $f(x) = y$.
Or $A \subset B$ donc $x \in B$, donc $f(x) \in B$, autrement dit $y \in B$.
On a bien démontré que $\boxed{f(A) \subset f(B)}$.

2. Soit $y \in f(A \cap B)$, montrons que $y \in f(A) \cap f(B)$.
$y \in f(A \cap B)$ donc il existe x dans $A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
$x \in A \cap B$ donc $x \in A$, donc $f(x) \in f(A)$ c'est-à-dire $y \in f(A)$.
De même, $x \in A \cap B$ donc $x \in B$, donc $f(x) \in f(B)$ donc $y \in f(B)$.
Donc $y \in f(A) \cap f(B)$.
On a démontré que $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)}$.

3.
- On montre que $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$, montrons que $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ donc $f(x) \in A \cup B$.
  Si $f(x) \in A$, alors $x \in f^{-1}(A)$.
  Si $f(x) \notin A$, alors $f(x) \in B$ (car $f(x) \in A \cup B$), donc $x \in f^{-1}(B)$.
  Finalement, $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  Donc $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- Montrons $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.
  Soit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  Si $x \in f^{-1}(A)$, alors $f(x) \in A$ donc $f(x) \in A \cup B$ donc $x \in f^{-1}(A \cup B)$.
  Si $x \notin f^{-1}(A)$, alors $x \in f^{-1}(B)$, donc de même, $x \in f^{-1}(A \cup B)$.
  Donc dans tous les cas $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

On a donc bien l'égalité des ensembles.

Correction 10.

(a)
$$\begin{aligned} |-2x+3| \geqslant 1 &\iff -2x+3 \geqslant 1 \text{ ou } -2x+3 \leqslant -1 \\ &\iff -2x \geqslant -2 \text{ ou } -2x \leqslant -4 \\ &\iff x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2 \qquad \boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[} \end{aligned}$$

(b)
- signe de $4x^2 - 4x + 1$:
  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$ donc la racine est $\frac{4}{2\times 4} = \frac{1}{2}$, et $a = 4 > 0$ donc « $+0+$ ».
- $x + 1 > 0 \iff x > -1$
- $x - 3 > 0 \iff x > 3$

Donc

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$4x^2-4x+1$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x^2-4x+1}{-2(x+1)(x-3)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$+$	$\|$	$-$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup \{\frac{1}{2}\} \cup]3, +\infty[}$.

(c)
- $3x - 4 < 0 \iff 3x < 4 \iff x < \frac{4}{3}$
- $x - 7 < 0 \iff x < 7$
- $x^2 - 4 < 0 \iff x^2 < 4 \iff x \in]-2, 2[$

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		2		7		$+\infty$
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-4)(x-7)(x^2-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-2[\cup]\frac{4}{3},2[\cup]7,+\infty[}$.

Correction 11.

1. C'est un polynôme du second degré en x, et $a=1\geqslant 0$.
$\Delta=(4-m)^2-4(4-2m)=16-8m+m^2-16+8m=m^2$.

- Si $m=0$: alors $\Delta=0$ et il n'y a qu'une racine, $x=-\frac{4}{2}=-2$ et donc $\boxed{\mathcal{S}=\{-2\}}$.
- Si $m\neq 0$, alors les racines sont $x_1=\frac{-(4-m)-m}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ et $x_2=\frac{-(4-m)+m}{2}=-2+m$.
  $a>0$ donc le polynôme est négatif entre les racines.
  Donc $\boxed{\begin{array}{l}\text{si } m>0, \text{ alors } x_1<x_2 \text{ donc } \mathcal{S}=[-2;-2+m];\\ \text{si } m<0, \text{ alors } x_2<x_1 \text{ donc } \mathcal{S}=[-2+m,-2].\end{array}}$

2. $$\begin{aligned}x^2+(4-m)x+4-2m\leqslant 0 &\iff x^2+4x-mx+4-2m\leqslant 0\\ &\iff m(-x-2)\leqslant -x^2-4x-4\\ &\iff m(x+2)\geqslant (x+2)^2\end{aligned}$$

Si $x=2$, alors l'inéquation est équivalente à $0\geqslant 0$ donc $\boxed{\mathcal{S}=\mathbb{R}}$.

Si $x>-2$, alors $x+2>0$ donc l'inéquation est équivalente à $m\geqslant x+2$: $\boxed{\mathcal{S}=[x+2,+\infty[}$.

Si $x<-2$, alors $x+2<0$ donc l'inéquation est équivalente à $m\leqslant x+2$ donc $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,x+2]}$.