# Corrigé du DM n° 7

## ❀❀ Correction 1.

**1.** $f$ est une fraction rationnelle, elle est dérivable partout où son dénominateur ne s'annule pas.
Or pour $x^2+3x+2$ : $\Delta = 3^2 - 4\times 2 = 1$, donc le polynôme a deux racines : $x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ . $x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{-1;-2\}}$.

Pour $x \neq -1$ et $-2$ : $f'(x) = \frac{-(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$.

$-\frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2} \neq \frac{-2x+3}{(x^2+3x+2)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | |
| $2x+3$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $(x^2+3x+2)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $f$ | | ↗ | $\Vert$ | ↗ | | ↘ | $\Vert$ | ↘ | |

**2.** $f$ est un produit :
⋆ $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
⋆ $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est la composée de $x \mapsto 4-x^2$, dérivable sur $\mathbb{R}$, par la racine carrée, dérivable sur $]0,+\infty[$.
Or $4-x^2 > 0 \iff -2 < x < 2$.
Donc $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est dérivable sur $]-2;2[$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } ]-2,2[}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times\sqrt{4-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= 2\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= 2\frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

2 et $\sqrt{4-x^2}$ sont positifs donc $f'(x)$ est du signe de $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$.

| $x$ | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{2}-x$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\sqrt{2}+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ |
| $f$ | $0$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | $0$ |

**3.** $f$ est un quotient, le numérateur est dérivable sur $]0,+\infty[$ et le dénominateur est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } ]0,+\infty[}$.

Pour $x>0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
$x^2 > 0$ sur $]0,+\infty[$
$1-\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e$ car la fonction ln est strictement croissante.
Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } ]0,e[ \text{ et strictement décroissante sur } ]e,+\infty[}$.

**4.** $f$ est la somme de la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction inverse dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.
Pour tout $x$, $e^x > 0$ et $\frac{1}{x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est strictement positive.
Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } ]-\infty, 0[ \text{ et sur } ]0, +\infty[}$.

**Attention :** *$f$ n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.*

## Correction 2.

❀❀ **(a)** $\Delta = 4 + 12 = 16$, le polynôme a deux racines : $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$
le coefficient de $x^2$ est positif donc $\boxed{\mathcal{S} = [-3; 1]}$.

❀❀ **(b)** $5x^2 - 8x + 3 \geqslant -\frac{1}{5} \iff 5x^2 - 8x + \frac{16}{5} \geqslant 0$
$\Delta = (-8)^2 - 4 \times \frac{16}{5} \times 5 = 0$ donc il y a une seule racine et $a = 5 > 0$ donc $5x^2 - 8x + \frac{16}{5}$ est toujours positif ou nul.
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$.

❀❀ **(c)** $-x^2 + 2x - 1 > 1 \iff -x^2 + 2x - 2 > 0$
Pour $-x^2 + 2x - 2$ : $\Delta = 4 - 8 < 0$ or $a = -1 < 0$ donc le polynôme $-x^2 + 2x - 2$ est toujours strictement négatif donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

❀❀ **(d)** • Pour $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$ : $\Delta = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} = \frac{25}{16}$ ;
ce polynôme a deux racines, $x_1 = \dfrac{-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{2} = -\dfrac{3}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}}{2} = \dfrac{1}{2}$.
• Pour $x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$ : $\Delta = \frac{16}{25} + \frac{4}{5} = \frac{36}{25}$ ;
deux racines également : $x'_1 = \dfrac{-\frac{4}{5} - \frac{6}{5}}{2} = -1$ et $x'_2 = \dfrac{-\frac{4}{5} + \frac{6}{5}}{2} = \frac{1}{5}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{3}{4}$ | | $\frac{1}{5}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$ | | + | \| | + | 0 | − | \| | − | 0 | + | |
| $x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$ | | + | 0 | − | \| | − | 0 | + | \| | + | |
| $\dfrac{x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}}{x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}}$ | | + | \|\| | − | 0 | + | \|\| | − | 0 | + | |

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]-1, -\frac{3}{4}\right] \cup \left]\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]}$.

**(e)** • $-x^2 - 20x - 100 = -(x^2 + 2 \times 10x + 10^2) = -(x + 10)^2$
• pour $3x^2 + 6x - 3$ : $\Delta = 6^2 + 4 \times 9 = 2 \times 36 = (6\sqrt{2})^2$
le polynôme a deux racines : $x_1 = \frac{-6-6\sqrt{2}}{2\times 3} = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-6+6\sqrt{2}}{2\times 3} = -1 + \sqrt{2}$.
Et $a = 3 > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-10$ | | $-1-\sqrt{2}$ | | $-1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(x+10)^2$ | | − | 0 | − | \| | − | \| | − | |
| $3x^2 + 6x - 3$ | | + | \| | + | 0 | − | 0 | + | |
| $(-x^2 - 20x - 100)(3x^2 + 6x - 3)$ | | − | 0 | − | 0 | + | 0 | − | |

Donc $\boxed{\mathcal{S} = ]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}[}$.

**(f)** $(2 - 2x^2)(4x^2 - 8x + 4) = 2(1 - x^2) \times 4(x^2 - 2x + 1) = 8(1-x)(1+x)(x-1)^2 = 8(1-x)^3(1+x)$.
Et $(1 - x)^3$ est du même signe que $1 - x$.
Donc

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1-x)^3$ | | + | \| | + | 0 | − | |
| $1 + x$ | | − | 0 | + | \| | + | |
| $(2 - 2x^2)(4x^2 - 8x + 4)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

Donc $\boxed{\mathcal{S} = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$.

❀❀ **(g)** $1+x > \frac{1}{x} \iff 1+x-\frac{1}{x} > 0 \iff \frac{x+x^2-1}{x} > 0$

Pour le polynôme $x^2+x-1$ : $\Delta = 1+4 = 5$ donc $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $\frac{x+x^2-1}{x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0\right[ \cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$.

**(h)** $\frac{x}{x-2} - \frac{x+8}{x+2} \leqslant \frac{16}{x^2-4} \iff \frac{x(x+2)-(x+8)(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{16}{x^2-4} \leqslant 0$

$\iff \frac{x^2+2x-(x^2+8x-2x-16)-16}{x^2-4} \leqslant 0$

$\iff \frac{-4x}{x^2-4} \leqslant 0$

Or $x^2-4<0 \iff -2<x<2$.

Donc

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4x$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | |
| $x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{-4x}{x^2-4}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

Donc $\boxed{\mathcal{S} = ]-2;0] \cup ]2,+\infty[}$.

## ❀❀ Correction 3.

$\boxed{g^{-1}([2;4]) = [-4,-2] \cup [2,4]}$ $\boxed{g^{-1}([\![-1;3]\!]) = [\![-3;3]\!]}$ $\boxed{g([-1,2]) = [0,2]}$

$g([-1,3]) = [0,3]$, donc $\boxed{g^{-1}(g([-1,3])) = [-3,3]}$

*On peut tracer la courbe de la valeur absolue pour s'aider !*

## Correction 4.

**1.** • Montrons que $f$ est injective.
Soient $(x,y)$ et $(x',y')$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
On suppose que $f(x,y) = f(x',y')$.
Alors $(x+y, x-y) = (x'+y', x'-y')$ donc $\left\{\begin{array}{ll} x+y = x'+y' & (1) \\ x-y = x'-y' & (2) \end{array}\right.$
$(1)+(2)$ donne $2x = 2x'$ donc $x = x'$
$(1)-(2)$ donne $2y = 2y'$ donc $y = y'$
Donc $(x,y) = (x',y')$.
Donc $\underline{f \text{ est injective}}$.

• Montrons que $(1,2)$ n'a pas d'antécédent par $f$ :
supposons que $f(x,y) = (1,2)$, alors $x+y = 1$ et $x-y = 2$.
En ajoutant les deux égalités, on obtient $2x = 3$, ce qui n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
Donc $\underline{f \text{ n'est pas surjective}}$.

• $\underline{f \text{ n'est pas bijective}}$.

**2.** Montrons que $g$ est bijective : soit $y \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$, résolvons l'équation $g(z) = y$.

$g(z) = y \iff \frac{iz-i}{z+3} = y$

$\iff iz - i = y(z+3)$

$\iff iz - yz = 3y + i$

$\iff z(i-y) = 3y+i$

$\iff z = \frac{3y+i}{i-y}$ car $y \neq i$

De plus, $z \neq -3$ car $\frac{3y+i}{i-y} = -3 \iff 3y+i = -3i+3y \iff i = -3i$ ce qui est faux.

Donc tout $y$ de $\mathbb{C}\backslash\{-3\}$ : ... 

Donc $g$ est bijective, donc injective et surjective et $\boxed{\begin{array}{cccc} g^{-1}: & \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{-3\} \\ & y & \mapsto & \frac{3y+i}{i-y} \end{array}}$.

❀❀ **3.** Montrons que $h$ est bijective : $\forall n \in \mathbb{Z},\ h(x) = n \iff x + 1 = n \iff x = n - 1$.
Autrement dit $n - 1$ est l'unique antécédent de $n$ par $h$.
Donc $h$ est bijective, donc injective et surjective et $\boxed{\begin{array}{cccc} h^{-1}: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n-1 \end{array}}$.

## Correction 5.

❀❀ **1.** *Définition du cours !!*

**2.** On procède par double inclusion.

- Montrons que $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
  Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$, montrons que $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
  $x \in f^{-1}(A \cap B)$ donc $f(x) \in A \cap B$.
  Donc $f(x) \in A$ donc $x \in f^{-1}(A)$, et $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$.
  Donc $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
  On vient de montrer que $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

- Montrons que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.
  Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, montrons que $x \in f^{-1}(A \cap B)$.
  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(A)$ donc $f(x) \in A$.
  De même, $f(x) \in B$.
  Ainsi, $f(x) \in A \cap B$ donc $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Donc $\boxed{f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)}$.

**Remarque,** *on peut aussi dans ce cas raisonner par équivalence :*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\ &\iff f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}.$$

Donc $\boxed{f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)}$.

**3.** On procède également par double inclusion.

- Montrons que $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$, montrons que $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ donc $f(x) \in A \cup B$.
  Si $f(x) \in A$ alors $x \in f^{-1}(A)$ donc $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  Si $f(x) \notin A$ alors $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  Donc dans tous les cas $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  On vient de montrer que $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

- Montrons que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.
  Soit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, montrons que $x \in f^{-1}(A \cup B)$.
  $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$.
  Si $x \in f^{-1}(A)$, alors $f(x) \in A$ donc $f(x) \in A \cup B$.
  Si $x \notin f^{-1}(A)$, alors $x \in f^{-1}(B)$ donc $f(x) \in B$ donc $f(x) \in A \cup B$.
  Ainsi, dans tous les cas, $f(x) \in A \cup B$ donc $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Donc $\boxed{f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)}$.

**Remarque,** *on peut aussi raisonner par équivalence comme précédemment.*

## Correction 6.

**1.** **(a)** $P(\frac{1}{2}) = 0$

**(b)** $P(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^2 - 12x + 26) = 2(x - \frac{1}{2})(x^2 - 6x + 13)$.
Pour $x^2 - 6x + 13$ : $\Delta = 36 - 52 = -16$ donc le polynôme a deux racines complexes :
$x_1 = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i$ et $x_2 = 3 + 2i$.
Donc $\boxed{P \text{ a une racine réelle : } \frac{1}{2} \text{ et deux racines complexes } 3 - 2i \text{ et } 3 + 2i}$.

**2.** **(a)** Pour ce polynôme, $\Delta = 16 + 240 = 256 = 16^2$ donc les racines sont $X_1 = \frac{-4-16}{2\times 2} = -5$ et $X_2 = \frac{-4+16}{4} = 3$.
$\boxed{\text{Les solutions sont } -5 \text{ et } 3.}$

**(b)** On remarque que $2(x^2)^2 + 4(x^2) - 30 = Q(x)$.
Ainsi, $Q(x) = 0 \iff x^2 = -5$ ou $x^2 = 3$
$\iff x = i\sqrt{5}$ ou $x = -i\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ .

Donc $\boxed{\begin{array}{l} Q \text{ a 4 racines, 2 réelles : } \sqrt{3} \text{ et } -\sqrt{3} \\ \qquad\qquad\quad \text{2 complexes : } i\sqrt{5} \text{ et } -i\sqrt{5} \end{array}}$.

**3.** • $z_1 = (-1 - i)^{15}$ :
On pose $z = -1 - i$, de sorte que $z_1 = z^2$.
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
Alors, si $\theta$ est un argument de $z$, on a : $\cos(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
donc $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ $[2\pi]$
Donc $z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
Donc $z_1 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^{15} = (\sqrt{2})^{15}e^{15i\frac{5\pi}{4}}$
$\frac{15\times 5}{4} = \frac{75}{4} = \frac{8\times 9+3}{4} = 2 \times 9 + \frac{3}{4}$ donc
$\boxed{\text{la forme trigonométrique de } z_1 \text{ est } (\sqrt{2})^{15}e^{-\frac{3\pi}{4}}}$.

• $z_2 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^2$ :
⋆ $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
⋆ $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
donc $z_2 = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{2i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})} = \boxed{\frac{1}{4}e^{4i\frac{\pi}{3}}}$

• $z_3 = -6 + 2i\sqrt{3}$
$|z_3| = \sqrt{(-6)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
donc $\cos(\theta) = \frac{-6}{4\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.
Donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ donc $\boxed{z_3 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$.

• $z_4 = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$ : *le module est un nombre positif !*
$-1 = e^{i\pi}$ donc $z_4 = e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \boxed{e^{i\frac{3\pi}{4}}}$