Corrigé du DM n°6

Correction 1.

Attention : *pour **1.**, bien raisonner par équivalence (en appliquant le théorème du produit nul) pour donner toutes les solutions et uniquement des solutions.*

1. $4(10x+1)(-3x-4)(3-x)=0 \iff 4=0$ ou $10x+1=0$ ou $-3x-4=0$ ou $3-x=0$
$\iff x=\frac{-1}{10}$ ou $x=\frac{-4}{3}$ ou $x=3$

$\boxed{\mathcal{S}=\{-\frac{1}{10};-\frac{4}{3};3\}}$

3.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\frac{(2x-1)(2-x)}{4x+3}$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

car $2x-1>0 \iff 2x>1 \iff x>\frac{1}{2}$
car $2-x>0 \iff 2>x$
car $4x+3>0 \iff 4x>-3 \iff x>-\frac{3}{4}$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-\frac{3}{4}[\cup]\frac{1}{2},2[}$.

4.

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		0		$+\infty$
$8x$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$8x(4x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $8x>0 \iff x>0$
car $4x+6>0 \Leftrightarrow 4x>-6 \Leftrightarrow x>-\frac{6}{4} \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty;-\frac{3}{2}]\cup[0,+\infty[}$.

5. $-7x-1=0 \iff -7x=1 \iff x=\frac{1}{-7}$ et $m=-7<0$ donc « $+0-$ ».
$-5x-8=0 \iff -8=5x \iff x=\frac{-8}{5}$ et $m=-5<0$ donc « $+0-$ ».

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		$-\frac{1}{7}$		0		$+\infty$
$10x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$-7x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$-5x-8$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$10x(-7x-1)(-5x-8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-\frac{8}{5}[\cup]-\frac{1}{7},0[}$.

8. $(2x+1)(3x+4)\leqslant(2x+1)(x+5) \iff (2x+1)(3x+4)-(2x+1)(x+5)\leqslant 0$
$\iff (2x+1)\big(3x+4-(x+5)\big)\leqslant 0$
$\iff (2x+1)\big(3x+4-x-5\big)\leqslant 0$
$\iff (2x+1)(2x-1)\leqslant 0$

Donc

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $2x+1>0 \iff 2x>-1 \iff x>-\frac{1}{2}$
car $2x-1>0 \iff 2x>1 \iff x>\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

9. On remarque que ce polynôme s'annule en 1.
Par division euclidienne ou identification des coefficients, on obtient $-2x^3+3x^2+2x-3=(x-1)(-2x^2+x+3)$.
Et les racines de $-2x^2+x+3$ sont $\frac{3}{2}$ et -1, et puisque $a=-2<0$, le signe est « $-0+0-$ ».
Ainsi,

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-2x^3+3x^2+2x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

car $x-1>0 \iff x>1$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-1,1[\cup]\frac{3}{2},+\infty[}$.

10. $|x-6| = 3 \iff x-6 = 3$ ou $x-6 = -3 \iff x = 9$ ou $x = 3$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \{3; 9\}}$

11. $|x-2| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant x-2 \leqslant 3$
$\iff -3+2 \leqslant x \leqslant 3+2$
$\iff -1 \leqslant x \leqslant 5$ donc $\boxed{\mathcal{S} = [-1; 5]}$.

12. $|2x+3| \geqslant 2 \iff 2x+3 \leqslant -2$ ou $2 \leqslant 2x+3$
$\iff 2x \leqslant -5$ ou $-1 \leqslant 2x$
$\iff x \leqslant -\frac{5}{2}$ ou $-\frac{1}{2} \leqslant x$ donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, +\infty[}$.

Correction 2.

- $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 - 6x + \frac{9}{2}$.
  La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.
  u est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Cherchons son signe :
  $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{2} = 36 - 36 = 0$ donc il y a une racine : $x_0 = \dfrac{6}{2 \times 2} = \dfrac{3}{2}$.
  Et $a = 2 \geqslant 0$ donc pour tout réel x, $u(x) \geqslant 0$, et $u(x) = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}$.
  Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et dérivable sur } \mathbb{R} \backslash \{\frac{3}{2}\}}$.
- $g(x) = \ln(v(x))$ avec $v(x) = x^2 - 4x + 5$.
  v est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$, et ln est défini et dérivable sur $]0, +\infty[$ donc g est définie et dérivable pour tous les x tels que $v(x) > 0$.
  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$ donc v n'a pas de racines réelles, et $a = 1 > 0$ donc v est toujours strictement positif.
  Donc $\boxed{g \text{ est défini et dérivable sur } \mathbb{R}}$.

Correction 3.

(a)
$$\begin{array}{ccccccc} -2 & < & x & < & -\frac{1}{3} & < & 0 \\ (-2)^2 & > & x^2 & > & \left(-\frac{1}{3}\right)^2 & & \\ 3 \times 4 & > & 3x^2 & > & 3 \times \frac{1}{9} & & \end{array}$$
car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$

Donc, $\boxed{\text{si } -2 < x < -\frac{1}{3}, \text{ alors } \frac{1}{3} < 3x^2 < 12}$.

(b)
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & x & \leqslant & \frac{8}{3} \\ & & \frac{3}{8} & \leqslant & \frac{1}{x} & < & \frac{1}{2} \\ & & -\frac{3}{8} & \geqslant & -\frac{1}{x} & > & -\frac{1}{2} \end{array}$$
on a appliqué la fonction inverse, strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

Donc, $\boxed{\text{si } 2 < x \leqslant \frac{8}{3}, \text{ alors } -\frac{1}{2} < -\frac{1}{x} \leqslant -\frac{3}{8}}$.

(c)
$$\begin{array}{ccccc} x & \leqslant & -5 & < & 0 \\ \frac{1}{-5} & \leqslant & \frac{1}{x} & < & 0 \\ -\frac{3}{5} & \leqslant & \frac{3}{x} & < & 0 \end{array}$$
on a appliqué la fonction inverse, strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$

Donc, $\boxed{\text{si } x \leqslant -5, \text{ alors } -\frac{3}{5} < \frac{3}{x} < 0}$.