Corrigé du DM n° 6

Correction 1.

1. f est un polynôme, donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$: on cherche son signe.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4$.
Donc $x_1 = \frac{4-2}{2\times 3} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{4+2}{2\times 3} = 1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. f est la somme de $x \mapsto 10\sqrt{x}$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et d'une fonction affine, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[}$.
Pour $x > 0$, $f'(x) = 10 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5 = 5\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = 5\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$.
Or $1 - \sqrt{x} > 0 \iff 1 > \sqrt{x} \iff 1 > x$ car la fonction racine carrée est croissante sur $]0, +\infty[$.
Et $\sqrt{x} \geqslant 0$.
Donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0, 1] \text{ et décroissante sur } [1, +\infty[}$.

Attention : *résoudre $f'(x) = 0$ ne donne pas les signes ! Il faut résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$ pour savoir où mettre les $+$, et dans cette inéquation, bien justifier chacune des étapes (opérations, application d'une fonction) pour ne pas se tromper !*

3. f est un polynôme, donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 18x = 6x(2x^2 + x - 3)$.
Pour $2x^2 + x - 3$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$ donc $x_1 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 1$.
Donc

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

4. f est la somme de la fonction carré dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction ln dérivable sur $]0, +\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[}$.
Pour tout x strictement positif, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$.
$x > 0$ donc $f'(x)$ est la somme de deux termes strictement positifs, donc $f'(x)$ est strictement positif.
Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$.

5. f est la composée d'un polynôme par la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = (-6x^2 + 15x - 9)e^{-2x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 9x + 3} = 3(-2x^2 + 5x - 3)e^{-2x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 9x + 3}$.
Pour tout x, $e^{-2x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 9x + 3} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 5x - 3$.
$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 25 - 24 = 1$ donc $x_1 = \frac{-5-1}{-4} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 1$.
On note que $a < 0$, donc $-2x^2 + 5x - 3$ est positif entre les racines.
Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty, 1] \text{ et sur } [\frac{3}{2}, +\infty[\text{ et croissante sur } [1, \frac{3}{2}]}$.

Correction 2.

Pour f, ne pas oublier la valeur absolue : une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(|x|)$.

Une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{1}{7}\ln(|x|) - \frac{1}{3\pi}\cos(3\pi x)$.

Pour g : formule de dérivée $\left(\frac{1}{u}\right)' = \ldots$

Une primitive de g est $G : x \mapsto \frac{1}{6(1-3x^2)}$

Pour h : primitive terme à terme.

Une primitive de h est $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x$.

Pour k : formule $(e^u)' = \ldots$

Une primitive de k est $K : x \mapsto -e^{\frac{1}{x}}$.

Attention : $(u \times v)' \neq u' \times v'$! !

Autrement dit, si on trouve une primitive de $e^{\frac{1}{x}}$ et une primitive de $\frac{1}{x^2}$, le produit des deux NE SERA PAS une primitive de k. Le produit est à traiter comme un tout !

Correction 3.

Attention : *logique !*

- *Raisonnement FAUX trouvé dans de nombreuses copies « Pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires, il faut que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. »*
  . . . après calculs : « pour $m = 3$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ donc pour $m = 3$, les vecteurs sont colinéaires. »
  La proposition à citer serait « pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires, il suffit que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ».
- *L'énoncé demandait de trouver « les » valeurs de m . . . (et pas « des »).*
  Il fallait donc utiliser des équivalences dans les raisonnements, et résoudre des équations. Se contenter de trouver une valeur satisfaisante ne répondait que partiellement à la question.

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\iff \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Or $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2m \\ m+3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1-m \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-6 \\ -2m+6 \\ 2m^2-4m-6 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\iff 2m - 6 = 0$ et $-2m + 6 = 0$ et $2m^2 - 4m - 6 = 0$.

Or $2m - 6 = 0 \iff m = 3$, donc $m = 3$ est la seule valeur potentielle, et elle convient pour les deux autres équations : $-2 \times 3 + 6 = 0$ et $2 \times 3^2 - 4 \times 3 - 6 = 18 - 12 - 6 = 0$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \iff m = 3}$.

2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Or $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -4m + (m+3)(1-m) - 3 = -6m - m^2 = -m(6+m)$.

Donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \iff m = 0$ ou $6 + m = 0 \iff m = 0$ ou $m = -6$.

Donc $\boxed{\text{les valeurs de } m \text{ telles que } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ soient orthogonaux sont } 0 \text{ et } -6}$.

3. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ coplanaires $\iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Or } [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \begin{vmatrix} -2m & 2 & 0 \\ m+3 & 1-m & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2m(1-m) + 12 + 0 - 0 - (-2)(-2m) - 2(m+3) \\
&= -2m + 2m^2 + 12 - 4m - 2m - 6 \\
&= 2m^2 - 8m + 6
\end{aligned}$$

Pour ce polynôme, $\Delta = 64 - 4 \times 2 \times 6 = 16$ donc $m = \frac{8-4}{4} = 1$ ou $m = \frac{8+4}{4} = 3$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ coplanaires} \iff m = 1 \text{ ou } m = 3}$.