Corrigé du DM n° 4

Correction 1 .

$z_1+z_2=1-2i+i\sqrt{3}-1=\underline{(\sqrt{3}-2)i}$

$z_1-z_2=1-2i-(i\sqrt{3}-1)=1-2i-i\sqrt{3}+1=\underline{2-i(2+\sqrt{3})}$

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(1-2i)(i\sqrt{3}-1)\\&=i\sqrt{3}-1-2i^2\sqrt{3}+2i\\&=-1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}+2i\\&=\underline{-1+2\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z_1)^2&=(1-2i)^2\\&=1-2\times1\times2i+(2i)^2\\&=1-4i-4\\&=\underline{-3-4i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{1-2i}{i\sqrt{3}-1}\\&=\frac{(1-2i)(-i\sqrt{3}-1)}{(-1)^2+\sqrt{3}^2}\\&=\frac{-i\sqrt{3}-1+2i^2\sqrt{3}+2i}{4}\\&=\frac{-1-2\sqrt{3}+i(2-\sqrt{3})}{4}\\&=\underline{-\frac{1+2\sqrt{3}}{4}+\frac{2-\sqrt{3}}{4}i}\end{aligned}$$

erreurs de calcul ! Checklist :

⋆ parenthèses

⋆ $-\frac{a+b}{2}=\frac{-a-b}{2}$ et $-1+2\sqrt{3}=-(1-2\sqrt{3})$

⋆ <u>ne pas</u> oublier le double produit dans les identités remarquables

⋆ $\overline{i\sqrt{3}-1}=-i\sqrt{3}-1$ (et non $i\sqrt{3}-1$)

Correction 2 .

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}\\&=\frac{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}i+i^2}{\sqrt{3}^2+1^2}\\&=\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}\\&=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

On reconnaît $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc $\boxed{|z_1|=1 \text{ et } \arg(z_1)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$.

$$\begin{aligned}z_3&=2(i\cos(\theta)-\sin(\theta))\\&=2(-\sin(\theta)+i\cos(\theta))\\&=2\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=2e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{|z_3|=2 \text{ et } \arg(z_3)=\theta+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$.

z_2 : on pose $z=1+\sqrt{3}i$ et $z'=1-i$, ainsi $z_2=\left(\frac{z}{z'}\right)^{20}$.

• $|z|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$\cos(\theta)=\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)>0$ donc $\arg(z)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

• $|z'|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos(\theta')=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta')<0$

Donc $\arg(z')=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

• Donc $|z_2|=\left(\frac{|z|}{|z'|}\right)^{20}=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}=2^{10}=1024$.

Et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]=\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\ [2\pi]=\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$.

$$\begin{aligned}\text{Donc}\quad\arg(z_2)&=20\times\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]\\&=\frac{35\pi}{3}\ [2\pi]\\&=\frac{30\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\ [2\pi]\\&=5\times2\pi+\frac{5\pi}{3}\ [2\pi]\\&=\frac{5\pi}{3}\ [2\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{|z_2|=1024 \text{ et } \arg(z_2)=\frac{5\pi}{3}\ [2\pi]}$.

Ne pas oublier « $[2\pi]$ » dans les angles !

Correction 3 .

On note z_A,z_B,z_C,z_I et z_J les affixes respectives des points A,B,C,I et J.

I est le milieu de $[AB]$ donc $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$.

De même, $z_J=\frac{z_A+z_C}{2}$.

Or $z_{\overrightarrow{IJ}}=z_J-z_I$, donc
$$\begin{aligned}z_{\overrightarrow{IJ}}&=\frac{z_A+z_C}{2}-\frac{z_A+z_B}{2}\\&=\frac{z_C-z_B}{2}\\&=\frac{1}{2}z_{\overrightarrow{BC}}\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Donc d'une part $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc $\boxed{(IJ) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles}}$

Et d'autre part $\|\overrightarrow{IJ}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|$ donc $\boxed{IJ=\frac{1}{2}BC}$.

ne pas mélanger un vecteur (par exemple $\overrightarrow{IJ}$) et son affixe (par exemple $z_{\overrightarrow{IJ}}$) ou sa norme ($\|\overrightarrow{IJ}\|$ qui peut se noter IJ et est aussi égale à $\left|z_{\overrightarrow{IJ}}\right|$) !