Corrigé du DM n°4

Correction 1.

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -1+1+0 = 0$ donc $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux}}$.

2. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ est une base orthogonale directe car $\underline{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux}}$.

argument indispensable

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-0\\-(1+0)\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{avec } \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ est une base orthogonale directe de l'espace}}$.

3. $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$
$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$
$\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6}$.
Alors en posant $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{w}$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{w_1}$ ont les mêmes directions et sens que respectivement $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et ils sont tous de norme 1.
Donc $\boxed{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}) \text{ est une base orthonormale directe}}$.

Correction 2. Réponses.

(a) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1$

(b) $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$

(c) $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix}$

(d) $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{v}) = 6$
$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -6$

(e) $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}-15\\9\\-12\end{pmatrix}$

(f) $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix}-6\\-18\\6\end{pmatrix}$

Remarque : *prendre du recul sur l'énoncé : on peut réutiliser des calculs déjà faits !*
(et notamment $\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$).
Si on les refait, vérifier la cohérence !!!

Correction 3.

1. La base 1 est orthonormée donc $\overrightarrow{x_0} = (\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{x_1})\overrightarrow{x_1} + (\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{y_1})\overrightarrow{y_1} + (\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{z_1})\overrightarrow{z_1}$
Or $\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{x_1} = 1\times 1\times\cos(\alpha) = \cos(\alpha)$
$\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{y_1} = 1\times 1\times\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{z_1} = 0$ (orthogonaux).
Donc $\boxed{\overrightarrow{x_0} = \cos(\alpha)\overrightarrow{x_1} - \sin(\alpha)\overrightarrow{y_1}}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \overrightarrow{x_0}\wedge\overrightarrow{x_2} &= \Big(\cos(\alpha)\overrightarrow{x_1} - \sin(\alpha)\overrightarrow{y_1}\Big)\wedge\overrightarrow{x_2}\\ &= \cos(\alpha)\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{x_2} - \sin(\alpha)\overrightarrow{y_1}\wedge\overrightarrow{x_2}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}$ *donc ne pas changer l'ordre en utilisant la linéarité.*

$\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{x_2}$: la norme est $1\times 1\times\sin(\beta)$
la direction est $\overrightarrow{y_1}$
le sens est $+\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{y_1}\wedge\overrightarrow{x_2}$: la norme est $1\times 1\times\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
la direction est $\overrightarrow{z_2}$
le sens est $-\overrightarrow{z_1}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{x_0}\wedge\overrightarrow{x_2} = \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \sin(\alpha)\overrightarrow{z_2}}$

2. On procède de même que pour la 1, $\boxed{\overrightarrow{x_2} = \cos(\beta)\overrightarrow{x_1} - \sin(\beta)\overrightarrow{z_1}}$

Donc $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2} = \cos(\beta)\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_1} - \sin(\beta)\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{z_1}$
$= \boxed{\cos(\beta)\sin(\alpha)\overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\overrightarrow{y_0}}$

l'orientation de l'angle n'a pas d'importance dans le produit scalaire : $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$

3. On va exprimer les deux résultats dans la base 1 pour pouvoir les comparer.
$\overrightarrow{z_2} = \sin(\beta)\overrightarrow{x_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{z_1}$
Donc d'après le résultat obtenu à la question **1.** :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2} &= \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \sin(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{x_1} + \sin(\alpha)\cos(\beta)\overrightarrow{z_1} \\ &= \sin(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{x_1} + \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \sin(\alpha)\cos(\beta)\overrightarrow{z_1}\end{aligned}$$

De plus $\overrightarrow{y_0} = \sin(\alpha)\overrightarrow{x_1} + \cos(\alpha)\overrightarrow{y_1}$.
Donc d'après le résultat obtenu à la question **2.** :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2} &= \cos(\beta)\sin(\alpha)\overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\sin(\alpha)\overrightarrow{x_1} + \sin(\beta)\cos(\alpha)\overrightarrow{y_1} \\ &= \sin(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{x_1} + \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \sin(\alpha)\cos(\beta)\overrightarrow{z_1}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les deux résultats sont bien les mêmes}}$.

Attention : *les résultats des questions 1 et 2 ont l'air différents, mais ils ne sont pas exprimés dans la même base, donc on ne peut rien affirmer. Il faut les mettre sous la même forme (même base) pour pouvoir les comparer*