Corrigé du DM n°4

Correction 1. Réponses.

(a) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1$

(b) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

(c) $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

(d) $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}) = 6$
$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -6$

(e) $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$

(f) $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}$

Correction 2.

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$.
Or les côtés sont tous de même mesure donc les triangles ABC et ABD sont équilatéraux, donc $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}})$ mesurent $\frac{\pi}{3}$.
Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 1 \times \cos(\frac{\pi}{3}) - 1 \times 1 \times \cos(\frac{\pi}{3}) = 0$.
Donc $\boxed{(AB) \text{ et } (CD) \text{ sont orthogonales}}$.

2. **(a)** G est isobarycentre de A, B, C et D signifie que $\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}}$.
Donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$
Soit $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$
Donc $-4\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
Donc $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)}$.

(b)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}^2 &= \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AG} \\ &= \frac{1}{16}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{16}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right)\end{aligned}$$
De même qu'en **1.**, les angles des faces font tous $\frac{\pi}{3}$ et les côtés sont de longueur 1 donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AD} = 1$.
$$\begin{aligned}\text{Donc } \overrightarrow{AG}^2 &= \frac{1}{16}\left(1 + 1 + 1 + 2 \times 1 \times 1 \times \cos(\tfrac{\pi}{3}) + 2 \times 1 \times 1 \times \cos(\tfrac{\pi}{3}) + 2 \times 1 \times 1 \times \cos(\tfrac{\pi}{3})\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(3 + 2 \times \tfrac{1}{2} + 2 \times \tfrac{1}{2} + 2 \times \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{16} \times 6 \\ &= \boxed{\frac{3}{8}}\end{aligned}$$
Donc $\boxed{AG = \sqrt{\frac{3}{8}}}$.

(c) Le même raisonnement est aussi vrai avec les points B, C et D, car comme le tétraèdre est régulier, tous les points jouent tous le même rôle, donc $\boxed{BG = CG = DG = \sqrt{\frac{3}{8}}}$.

Correction 3.

1. La base 1 est orthonormée donc $\overrightarrow{x_0} = (\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{x_1})\overrightarrow{x_1} + (\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{y_1})\overrightarrow{y_1} + (\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{z_1})\overrightarrow{z_1}$
Or $\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{x_1} = 1 \times 1 \times \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$
$\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{y_1} = 1 \times 1 \times \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{z_1} = 0$ (orthogonaux).
Donc $\boxed{\overrightarrow{x_0} = \cos(\alpha)\overrightarrow{x_1} - \sin(\alpha)\overrightarrow{y_1}}$

Donc $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2} = \left(\cos(\alpha)\overrightarrow{x_1} - \sin(\alpha)\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \overrightarrow{x_2}$
$= \cos(\alpha)\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} - \sin(\alpha)\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_2}$

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$ donc ne pas changer l'ordre en utilisant la linéarité.

$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2}$: la norme est $1 \times 1 \times \sin(\beta)$
la direction est $\pm\overrightarrow{y_1}$
le sens est $+\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_2}$: la norme est $1 \times 1 \times \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
la direction est $\pm\overrightarrow{z_2}$
le sens est $-\overrightarrow{z_2}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2} = \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \sin(\alpha)\overrightarrow{z_2}}$

2. On procède de même que pour la **1**, $\boxed{\overrightarrow{x_2} = \cos(\beta)\overrightarrow{x_1} - \sin(\beta)\overrightarrow{z_1}}$

Donc $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2} = \cos(\beta)\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_1} - \sin(\beta)\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{z_1}$
$= \boxed{\cos(\beta)\sin(\alpha)\overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\overrightarrow{y_0}}$

l'orientation de l'angle n'a pas d'importance dans le produit scalaire :
$\cos(-\beta) = \cos(\beta)$

3. On va exprimer les deux résultats dans la base 1 pour pouvoir les comparer.
$\overrightarrow{z_2} = \sin(\beta)\overrightarrow{x_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{z_1}$
Donc d'après le résultat obtenu à la question **1.** :
$\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2} = \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \sin(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{x_1} + \sin(\alpha)\cos(\beta)\overrightarrow{z_1}$
$= \sin(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{x_1} + \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \sin(\alpha)\cos(\beta)\overrightarrow{z_1}$

De plus $\overrightarrow{y_0} = \sin(\alpha)\overrightarrow{x_1} + \cos(\alpha)\overrightarrow{y_1}$.
Donc d'après le résultat obtenu à la question **2.** :
$\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2} = \cos(\beta)\sin(\alpha)\overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\sin(\alpha)\overrightarrow{x_1} + \sin(\beta)\cos(\alpha)\overrightarrow{y_1}$
$= \sin(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{x_1} + \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \sin(\alpha)\cos(\beta)\overrightarrow{z_1}$

Donc $\boxed{\text{les deux résultats sont bien les mêmes}}$.

Attention : *les résultats des questions 1 et 2 ont l'air différents, mais ils ne sont pas exprimés à partir des mêmes vecteurs, donc on ne peut rien affirmer. Il faut les mettre sous la même forme (dans la même base) pour pouvoir les comparer*