Corrigé du DM n° 3

Correction 1.

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1\times 1 + 1\times(-2) + 1\times 0 = -1$
$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$
$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{5}$.
Or $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$.
Donc $\boxed{\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}}$.

$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1\times 0 - 1\times(-2) \\ -(1\times 0 - 1\times 1 \\ 1\times(-2) - 1\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3\end{pmatrix}$.
Ainsi, $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{14}$.
Or $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\sin(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$.
Donc $\boxed{\sin(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}}$.

2. • $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{v}\right]$
$= \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u}\right] + \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{v}\right]$ (par linéarité à droite)
Or $\overrightarrow{u}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, donc $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u}$ sont coplanaires, donc $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u}\right] = 0$.
De même, $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{v}\right] = 0$.
Donc $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = 0$ donc $\boxed{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\text{ et }\overrightarrow{w}\text{ sont coplanaires}}$.

• $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{v})$
$= \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
$= \frac{1}{\sqrt{3}}\times 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\times(-1)$ (d'après **1.**)
$= \boxed{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Correction 2.

1. $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4\end{vmatrix} = 2\times(-4) - 3\times 6 = -26 \neq 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base une plan.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2\times 6 + 3\times(-4) = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, donc $\boxed{\text{la base }\mathcal{B}'\text{ est orthogonale}}$.

2. On cherche x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4 = 2x+6y \\ 9 = 3x-4y\end{cases} \iff \begin{cases} x = 2-3y \\ 9 = 6-13y\end{cases}$
Donc $y = -\frac{3}{13}$ et $x = 2 + \frac{9}{13} = \frac{35}{13}$.
$\boxed{\text{Les coordonnées de }\overrightarrow{w}\text{ dans }\mathcal{B}'\text{ sont }\begin{pmatrix}\frac{35}{13}\\-\frac{3}{13}\end{pmatrix}}$.

3. **(a)** On cherche x et y tels que $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
Autrement dit $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$.
On résout le système : $\begin{cases} 3 = 2x+6y \\ 2 = 3x-4y\end{cases}$.
D'après la ligne 1, $x = \frac{3}{2} - 3y$.
En substituant x dans la ligne 2 : $2 = \frac{9}{2} - 9y - 4y$ donc $-\frac{5}{2} = -13y$ soit $y = \frac{5}{26}$.
Alors $x = \frac{3}{2} - \frac{15}{26} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$.
$\boxed{\text{Les coordonnées de }A\text{ dans le repère }(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\text{ sont }(\tfrac{12}{13};\tfrac{5}{26})}$.

(b) On cherche x et y tels que $\overrightarrow{\Omega A} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
Autrement dit $\begin{pmatrix}3-2\\2-(-3)\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$.

Cela revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} 1 = 2x + 6y \\ 5 = 3x - 4y \end{array}\right.$.

$x = \frac{1}{2} - 3y$ donc $5 = \frac{3}{2} - 9y - 4y$ donc $y = \frac{-7}{26}$ et $x = \frac{1}{2} + \frac{21}{26} = \frac{34}{26} = \frac{17}{13}$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de } A \text{ dans le repère } (\Omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ sont } (\tfrac{17}{13}, -\tfrac{7}{26}).}$

Correction 3.

On note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

⋆ $\overrightarrow{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ équivaut à $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1} = 0$ soit $x + y = 0$.

⋆ $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{u}$ coplanaires équivaut à $[\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{u}] = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad [\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{u}] &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} \\ &= z + 0 + 0 - x - y - 0 \\ &= -x - y + z \end{aligned}$$

⋆ $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ équivaut à $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

On cherche donc à résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array}\right.$.

D'après la ligne 1, $x = -y$ donc dans ligne 2, on a $z = 0$, et donc dans la ligne 3 : $(-y)^2 + y^2 + 0^2 = 1$ soit $y^2 = \frac{1}{2}$ donc $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On peut choisir $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $z = 0$.

$\boxed{\text{Un vecteur } \overrightarrow{u} \text{ possible satisfaisant les conditions est } \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

(On pouvait aussi avoir l'opposé : les considérations géométriques confirment qu'en effet deux vecteurs opposés sont possibles.)