Corrigé du DM n° 2

Correction 1. Réponses.

$A(x) = -3(x-1)(x+7)$

$B(x) = (x+2)(2x-13)$

$C(x) = x(5x-1)$

$D(x) = 2(2x-3)(x-1)$

$E(x) = 2(x+4)(x-1)$

$F(x) = -(x-1)(5x+3)$

Correction 2.

1. f est une fraction rationnelle, elle définie pour tous les x tels que $x-3 \neq 0$.
Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}}$.

2. $f(\frac{3}{2}) = \dfrac{2\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-3} = \dfrac{3}{\frac{3}{2}-\frac{6}{2}} = \dfrac{3}{-\frac{3}{2}} = 3 \times \dfrac{-2}{3} = -2.$

$\boxed{\text{L'image de } \frac{3}{2} \text{ par } f \text{ est } -2.}$

3. Pour $x \neq 3$: $f(x) = 5 \iff \frac{2x}{x-3} = 5$

$$\iff 2x = 5(x-3)$$
$$\iff 2x - 5x = -15$$
$$\iff x = 5$$

$\boxed{\text{Le seul antécédent de 5 par } f \text{ est 5.}}$

Ne pas oublier de répondre à la question ! La phrase, bien formulée, est indispensable ici.

Correction 3.

1. • $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$

• g est une fraction rationnelle,
et $2x + 16 = 0 \iff x = -8$
donc $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{-8\}}$.

• $\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\}$
$= \{x \in \mathbb{R}\backslash\{-8\} \mid \frac{x+1}{2x+16} \neq 0\}$

Or, pour $x \neq -8$:
$\frac{x+1}{2x+16} = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1.$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}\backslash\{-1;-8\}}$.

Et pour tout x de $\mathcal{D}_{f\circ g}$,

$$f\circ g(x) = \frac{1}{g(x)^3} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2x+16}\right)^3} = \boxed{\left(\frac{2x+16}{x+1}\right)^3}.$$

• $\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$
$= \{x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \mid \frac{1}{x^3} \neq -8\}$

Or $\frac{1}{x^3} = -8 \iff x^3 = -\frac{1}{2^3}$

$$\iff x^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$
$$\iff x = -\frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}\backslash\{0;-\frac{1}{2}\}}$.

Et pour $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$,

$$g\circ f(x) = \frac{\frac{1}{x^3}+1}{2\frac{1}{x^3}+16} = \boxed{\frac{1+x^3}{2+16x^3}}.$$

2. • $\boxed{\mathcal{D}_f = [0,+\infty[}$ et $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}}$ (fonction affine).

• $\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [0,+\infty[\}$.

Or $g(x) \geqslant 0 \iff -5x+2 \geqslant 0$.

$$\iff 2 \geqslant 5x$$
$$\iff x \leqslant \frac{2}{5}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} =]-\infty;\frac{2}{5}]}$.

Et $\boxed{\text{pour } x \text{ dans } \mathcal{D}_{f\circ g},\ f\circ g(x) = \sqrt{-5x+2}}$.

• $\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in [0,+\infty[\mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \boxed{[0,+\infty[}$

Et $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } \mathcal{D}_{g\circ f},\ g\circ f(x) = -5\sqrt{x}+2}$.

3. • $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}}$.

• $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f\circ g(x) = 5(e^x)^2 - 3e^x = \boxed{5e^{2x} - 3e^x}.$$

• $\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}$ et $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g\circ f(x) = e^{5x^2-3x}}$.

4. • $\boxed{\mathcal{D}_f = [0,+\infty[}$

• g est une fraction rationnelle,
or $-9x+4 = 0 \iff x = \frac{4}{9}$
donc $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{\frac{4}{9}\}}$.

• $\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{9}{4}\} \mid g(x) \geqslant 0\}$.

Pour $x \neq \frac{4}{9}$: $g(x) \geqslant 0 \iff -9x+4 > 0$ (car $7 > 0$)

$$\iff -9x > -4$$
$$\iff x < \frac{4}{9}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} =]-\infty;\frac{4}{9}[}$.

Et $\boxed{\text{pour } x \in \mathcal{D}_{f\circ g},\ f\circ g(x) = \sqrt{\frac{7}{-9x+4}}}$.

• $\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in [0,+\infty[\mid \sqrt{x} \neq \frac{4}{9}\}$.

Or $\sqrt{x} = \frac{4}{9} \iff x = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \iff x = \frac{16}{81}$.

Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = [0,\frac{16}{81}[\cup]\frac{16}{81},+\infty[}$.

Pour $\boxed{x \text{ dans } \mathcal{D}_{g\circ f},\ g\circ f(x) = \frac{7}{-9\sqrt{x}+4}}$.

Remarque : *dans les composées, ne pas oublier de tenir compte de l'ensemble de définition de la 1ère fonction !*