Devoir Maison n°27

pour Lundi 5 mai 2025, 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{12} - x + 1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Construire le tableau de variation complet de f.

2. **(a)** Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2, +\infty[$.
On notera α la solution de $f(x) = 0$ sur $[0, 2]$ et β la solution sur $]2; +\infty[$.
Calculer $f(1)$ et en déduire que $\alpha \geqslant 1$.

(b) Préciser le signe de f sur $[0, +\infty[$.

(c) Simplifier l'expression $1 + \frac{\alpha^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de α).

3. On cherche à obtenir une approximation de α. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$ où g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x^3}{12}$.

(a) Calculer u_1 puis démontrer que pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$.

(b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.
Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite (u_n) ?
En déduire que la suite (u_n) converge.

(c) On note ℓ sa limite, montrer que $\ell = 1 + \frac{\ell^3}{12}$.
En déduire que (u_n) converge vers α.

(d) Écrire un programme Python qui déterminer le rang n_0 à partir duquel $f(u_n) \leqslant 10^{-7}$, et renvoie la valeur u_{n_0}.
Que représente u_{n_0} ?

Exercice 2.

Soient $I =]0, 2\pi[$ et les fonctions f et g définies sur $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2(1-\cos(x))}}$ et $g(x) = f(\arccos(1 - x))$.

1. Démontrer que f est bien définie et est continue sur I.

2. **(a)** Calculer $\lim\limits_{x\to 2\pi} f(x)$.

(b) Calculer la limite de f en 0, et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0.
On note h le prolongement, le définir.

(c) La courbe de f a-t-elle une asymptote ? préciser.

★ **3.** **(a)** Simplifier l'expression de $g(x)$ pour tout x de $]0, 1[$.

(b) Déduire de ce qui précède que $\arccos(1 - x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2x}$.

Exercice 3.

1. L'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on définit la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1 : x \mapsto x^2$, $f_2 : x \mapsto e^x$ et $f_3 : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
Cette famille est-elle libre ? génératrice de E ?

3. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, où $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = (X - 1)^2$ et $P_4 = (X - 1)^3$, est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de $P = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$ dans cette base.

Exercice 4.

Étudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Révisions: un exercice au choix

Exercice 5.

En utilisant les équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^{\sin(x)} - 1}$

2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{x}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1 - e^{2x})(1 - \cos(3x))}{x^2 + 3x^4}$

★ **4.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ $(a > 0,\ b > 0)$

Exercice 6.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2. En déduire que f est constante.

Exercice 7.

1. Soit $P = -X^5 + 5X^4 - 7X^3 + 2X^2 - 4X + 8$.

- **(a)** Vérifier que 2 est racine et donner son ordre de multiplicité.
- **(b)** En déduire la factorisation maximale de P dans $\mathbb{R}[X]$, et dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, montrer que les racines complexes du polynôme $1 - X^n$ sont simples.

Exercice 8.

Un paquet d'œufs de Pâques en chocolat contient 4 œufs au chocolat au lait et 16 au chocolat noir.
On mange des œufs du paquet, l'un après l'autre, en piochant à chaque fois au hasard.
On note L_k l'événement : « le k-ième œuf mangé est au chocolat au lait ».
(*on précisera le nom des formules utilisées, et leur écriture littérale avant de calculer*)

1. Quelle est la probabilité que le deuxième œuf mangé soit au chocolat au lait ?

2. Le deuxième œuf mangé est au chocolat noir.
Quelle est la probabilité que le premier que l'on ait mangé ait été au chocolat au lait ?

3. Un gourmand mange 3 œufs.
Quelle est la probabilité que les 3 soient au lait ?
Quelle est la probabilité qu'il en mange 2 noirs (et donc un au lait) ?

4. Les événements L_1 et L_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 9.

1. Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
Montrer que F est un espace vectoriel, en déterminer une base et préciser sa dimension.

2. Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z - t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base et préciser sa dimension.