Corrigé du DM n°26

Correction 1.

- $\sqrt{x^2+1}-x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc par composition et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}+x = +\infty$
  donc par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x = 0}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\sin(y) \underset{y\to0}{\sim} y$ donc $\sin(\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $\sin(\frac{1}{x})e^{\cos(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}e^{\cos(x)}$.
  Or $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc, par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-1} \leqslant e^{\cos(x)} \leqslant e$.
  Donc pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}e^{-1} \leqslant \frac{1}{x}e^{\cos(x)} \leqslant \frac{1}{x}e$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement,
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}e^{\cos(x)} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{\cos(x)} = 0}$.

- $x(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$.
  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $e^y - 1 \underset{y\to0}{\sim} y$ donc $e^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x}$ donc
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$.
  De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ donc $x(e^{\frac{2}{x}} - 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{2}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1) = 2$.
  Donc par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2) = 3}$.

- $\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \dfrac{\sin(x)(\frac{1}{\cos(x)}-1)}{x^3} = \dfrac{\sin(x)\times(1-\cos(x))}{\cos(x)\times x^3} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x\times\frac{1}{2}x^2}{\cos(x)\times x^3} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{2\cos(x)}$.
  Or $\lim\limits_{x\to0} \cos(x) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \dfrac{1}{2}}$.

- $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ et $e^y - 1 \underset{y\to0}{\sim} y$ donc $e^{x^2} - 1 \underset{x\to0}{\sim} x^2$
  Donc $\frac{e^{x^2}-1}{x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{x} \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} = 0}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-7x+2}{x-11} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = \boxed{-\infty}$

- $\star$ $\lim\limits_{x\to0} 3x = 0$ et $\sin(y) \underset{y\to0}{\sim} y$ donc $\sin(3x) \underset{x\to0}{\sim} 3x$.
  De même, $\sin(5x) \underset{x\to0}{\sim} 5x$.
  $\star$ $x - x^3 \underset{x\to0}{\sim} x$ donc par puissance, $(x-x^3)^2 \underset{x\to0}{\sim} x^2$
  Donc par produit et quotient, $\dfrac{\sin(3x)\sin(5x)}{(x-x^3)^2} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{3x\times5x}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} 15$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)\sin(5x)}{(x-x^3)^2} = 15}$.

- $\star$ $\lim\limits_{x\to0} \sin(x) = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to0} e^{\sin(x)} = \lim\limits_{X\to0} e^X = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to0} xe^{\sin(x)} = 0$
  $\star$ $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$
  Donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{xe^{\sin(x)}}{\ln(x)} = 0}$

Attention : *on n'ajoute pas des équivalents ! Mais on peut ajouter des limites !*

Correction 2.

1. • $\frac{e^{\sqrt{x}}}{e^x} = e^{\sqrt{x}-x}$
Or $\sqrt{x} - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} - x = -\infty$.
Donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.
Donc oui, $\boxed{e^{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)}$.
• $\frac{\ln\sqrt{x}}{\ln(x)} = \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{2}$ ce qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
Donc non, $\boxed{\ln(\sqrt{x}) \text{ n'est pas négligeable devant } \ln(x) \text{ en } +\infty}$.

2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{0+1}{0+1} = 1$ donc $\boxed{x^2+1 \underset{x\to0}{\sim} x+1}$.
$\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ et $\ln(1+y) \underset{y\to0}{\sim} y$ donc $\ln(x^2+1) \underset{x\to0}{\sim} x^2$.
Et $\ln(x+1) \underset{x\to0}{\sim} x$.
Or x^2 et x ne sont pas équivalents au voisinage de 0 (le quotient ne tend pas vers 1).
Donc $\boxed{\ln(x^2+1) \text{ et } \ln(x+1) \text{ ne sont pas équivalents au voisinage de } 0}$.

Correction 3.

1. Soient α et β deux réels tels que $\alpha f_1 + \beta f_2 = \mathbf{0}$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0$.
En particulier pour $x = 0$, $\alpha + \beta = 0$ soit $\alpha = -\beta$, et pour $x = 1$, $\alpha e + 4\beta = 0$;
donc $(4-e)\beta = 0$ et puisque $e \neq 4$ on a $\beta = 0$ et donc $\alpha = 0$.
Donc $\boxed{(f_1, f_2) \text{ est une famille libre}}$.

2. **(a)** On note A la matrice des vecteurs en colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

Donc A est de rang 2 alors que la famille comporte 3 vecteurs, donc $\boxed{\text{la famille } (v_1, v_2, v_3) \text{ est liée}}$.
Et la matrice a 3 lignes, donc $\boxed{\text{la famille n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^3}$.

(b) Soient des réels λ, μ, γ tels que $\lambda A + \mu B + \gamma C = \mathbf{0}$

Alors on obtient le système (S) $\begin{cases} 0\lambda + 2\mu + 4\gamma = 0 \\ \lambda + \mu + \gamma = 0 \\ 0\lambda + \mu + 2\gamma = 0 \\ 0\lambda + 0\mu + 0\gamma = 0 \end{cases}$

Alors $(S) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = 0 \\ 2\mu + 4\gamma = 0 \\ \mu + 2\gamma = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = 0 \\ 2\mu + 4\gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Le système est compatible, il est de rang 2 avec 3 inconnues, donc il a une infinité de solution, donc au moins une différente de $(0, 0, 0)$, donc $\boxed{\text{la famille } (A, B, C) \text{ est liée}}$.
De plus, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $\text{vect}(A, B, C)$ car quels que soient les scalaires λ_1, λ_2 et λ_3, le coefficient en bas à droite de $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$ sera nul.
Donc $\boxed{\text{la famille } (A, B, C) \text{ n'est pas génératrice de } E}$.