Devoir Maison n°24

pour mardi 1er avril, 10h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

Une étude statistique sur un feu tricolore d'un carrefour montre que :
⋆ si le feu est vert, l'automobiliste passe dans 99% des cas.
⋆ si le feu est orange, il passe dans 30% des cas.
⋆ si le feu est rouge, l'automobiliste passe quand même dans 1% des cas.
Le cycle du feu dure 1 minute : 25 secondes de feu vert, 5 secondes de feu orange et 30 secondes de feu rouge.
On note V (respectivement O et R) l'événement : « le feu est vert (respectivement orange, rouge) », et A : « l'automobiliste s'arrête au feu ».

1. Quelle est la probabilité qu'un automobiliste s'arrête à ce feu ?

2. Quelle est la probabilité qu'un automobiliste rencontre le feu orange et passe ?

3. Un piéton voit une voiture passer le feu sans s'arrêter, quelle est la probabilité que le feu soit vert ?

Exercice 2.

Un hamster en cage a trois activités : dormir, manger, et courir dans une roue. Toutes les minutes, il est possible que le hamster change d'activité, suivant les règles suivantes :
⋆ lorsqu'il dort, il a neuf chances sur dix de continuer de dormir la minute suivante ;
⋆ lorsqu'il se réveille, il a une chance sur deux d'aller manger, et une chance sur deux d'aller faire tourner sa roue ;
⋆ lorsqu'il mange, il y a sept chances sur dix qu'il aille dormir ensuite, et trois chances sur dix qu'il aille faire tourner sa roue ;
⋆ lorsqu'il court dans sa roue, il a huit chances sur dix d'aller dormir à la fin de la minute, et deux chances sur dix de continuer à faire tourner la roue.
À l'instant 0, le hamster est déposé dans sa cage et il choisit l'une des trois activités de manière équiprobable.
On note D_n l'événement « à la minute n, le hamster dort », et de la même façon, M_n est l'événement « à la minute n, le hamster mange » et C_n « à la minute n, le hamster court ».
On note $d_n = \mathbf{P}(D_n)$, $m_n = \mathbf{P}(M_n)$ et $c_n = \mathbf{P}(C_n)$.

1. Expliquer pourquoi $\mathbf{P}_{D_n}(M_{n+1}) = \frac{1}{20}$. On admet que de même, $\mathbf{P}_{D_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{20}$.

2. Justifier que pour tout n, (D_n, C_n, M_n) est un système complet d'événements.
Appliquer la formule des probabilités totales dans ce système complet d'événements pour démontrer avec rigueur que $d_{n+1} = \frac{9}{10}d_n + \frac{7}{10}m_n + \frac{8}{10}c_n$.
Exprimer de même m_{n+1} et c_{n+1} en fonction de d_n, m_n et c_n.

3. On note $X_n = \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
Que vaut X_0 ?
Déterminer la matrice H qui vérifie, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = HX_n$.

4. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = H^n X_0$.

Bonus. Peut-on faire le parallèle avec un étudiant de TSI devant son téléphone portable avec insta, clash of clans et quizlet ?

★ Exercice 3.

Soient A, B et C des événements tels que $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) \neq 0$ et $\mathbf{P}_{A\cap B}(C) = \mathbf{P}_B(C)$.
Montrer que $\mathbf{P}_{B\cap C}(A) = \mathbf{P}_B(A)$.

Devoir Maison n°24

pour mardi 1er avril, 10h

Version « un peu moins mais bien ».

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

Une étude statistique sur un feu tricolore d'un carrefour montre que :
⋆ si le feu est vert, l'automobiliste passe dans 99% des cas.
⋆ si le feu est orange, il passe dans 30% des cas.
⋆ si le feu est rouge, l'automobiliste passe quand même dans 1% des cas.
Le cycle du feu dure 1 minute : 25 secondes de feu vert, 5 secondes de feu orange et 30 secondes de feu rouge.
On note V (respectivement O et R) l'événement : « le feu est vert (respectivement orange, rouge) », et A : « l'automobiliste s'arrête au feu ».

1. Quelle est la probabilité qu'un automobiliste s'arrête à ce feu ?

★ **2.** Quelle est la probabilité qu'un automobiliste rencontre le feu orange et passe ?

3. Un piéton voit une voiture passer le feu sans s'arrêter, quelle est la probabilité que le feu soit vert ?

Exercice 2.

Un hamster en cage a trois activités : dormir, manger, et courir dans une roue. Toutes les minutes, il est possible que le hamster change d'activité, suivant les règles suivantes :
⋆ lorsqu'il dort, il a neuf chances sur dix de continuer de dormir la minute suivante ;
⋆ lorsqu'il se réveille, il a une chance sur deux d'aller manger, et une chance sur deux d'aller faire tourner sa roue ;
⋆ lorsqu'il mange, il y a sept chances sur dix qu'il aille dormir ensuite, et trois chances sur dix qu'il aille faire tourner sa roue ;
⋆ lorsqu'il court dans sa roue, il a huit chances sur dix d'aller dormir à la fin de la minute, et deux chances sur dix de continuer à faire tourner la roue.
À l'instant 0, le hamster est déposé dans sa cage et il choisit l'une des trois activités de manière équiprobable.
On note D_n l'événement « à la minute n, le hamster dort », et de la même façon, M_n est l'événement « à la minute n, le hamster mange » et C_n « à la minute n, le hamster court ».
On note $d_n = \mathbf{P}(D_n)$, $m_n = \mathbf{P}(M_n)$ et $c_n = \mathbf{P}(C_n)$.

1. (*pas de question*) On admet que $\mathbf{P}_{D_n}(M_{n+1}) = \frac{1}{20}$ et $\mathbf{P}_{D_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{20}$.

2. Justifier que pour tout n, (D_n, C_n, M_n) est un système complet d'événements.
Appliquer la formule des probabilités totales dans ce système complet d'événements pour démontrer avec rigueur que $d_{n+1} = \frac{9}{10}d_n + \frac{7}{10}m_n + \frac{8}{10}c_n$.
Exprimer de même m_{n+1} et c_{n+1} en fonction de d_n, m_n et c_n.

3. On note $X_n = \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
Que vaut X_0 ?
Déterminer la matrice H qui vérifie, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = HX_n$.

★ **4.** Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = H^n X_0$.

Bonus. Peut-on faire le parallèle avec un étudiant de TSI devant son téléphone portable avec insta, clash of clans et quizlet ?