Corrigé du DM n°24

Correction 1.

1. Les événements V, O et R forment un système complet car le feu n'a que ces trois couleurs, et jamais deux ne sont allumées en même temps.
Dans ce système complet, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(V)\mathbf{P}_V(A) + \mathbf{P}(O)\mathbf{P}_O(A) + \mathbf{P}(R)\mathbf{P}_R(A)\\ &= \tfrac{25}{60}\times\tfrac{1}{100} + \tfrac{5}{60}\times\tfrac{70}{100} + \tfrac{30}{60}\times\tfrac{99}{100} \quad \text{car } \mathbf{P}_V(A) = 1 - \mathbf{P}_V(\overline{A}) \text{ idem avec } O \text{ et } R\\ &= \tfrac{25+350+2970}{6000}\\ &= \tfrac{3345}{6000}\\ &= \tfrac{223}{400}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un automobiliste s'arrête à ce feu est } \tfrac{223}{400} \text{ soit environ 0,56.}}$

2. On cherche $\mathbf{P}(O \cap \overline{A})$.
Par la formule des probabilités composées, $\mathbf{P}(O \cap \overline{A}) = \mathbf{P}(O) \times \mathbf{P}_O(\overline{A}) = \frac{5}{60} \times \frac{30}{100} = \frac{1}{40}$.

$\boxed{\text{La probabilité qu'un automobiliste rencontre le feu orange et passe est } \tfrac{1}{40}.}$

3. La probabilité cherchée est $\mathbf{P}_{\overline{A}}(V)$.
On utilise la formule de Bayes : $\mathbf{P}_{\overline{A}}(V) = \dfrac{\mathbf{P}(V)\mathbf{P}_V(\overline{A})}{\mathbf{P}(\overline{A})} = \dfrac{\frac{25}{60}\times\frac{99}{100}}{1-\frac{223}{400}} = \dfrac{2475}{6000} \times \dfrac{400}{177} = \dfrac{55}{59} \approx 0,93.$

$\boxed{\text{La voiture étant passée, la probabilité que le feu soit vert est de } \dfrac{55}{59} \text{ soit environ 0,93.}}$

Correction 2.

1. S'il dort à la minute n, il a une chance sur 10 de se réveiller, et une fois réveillé, il n'a qu'une chance sur 2 d'aller manger, donc cela fait $\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}$ soit bien une chance sur 20.
Formellement, $\mathbf{P}_{D_n}(M_{n+1}) = \mathbf{P}_{D_n}(\overline{D_{n+1}} \cap M_{n+1}) = \mathbf{P}_{D_n}(\overline{D_{n+1}}) \times \mathbf{P}_{D_n \cap \overline{D_{n+1}}}(M_{n+1}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$.

2. À la minute n, le hamster n'a que ces 3 activités, donc la réunion de D_n, C_n et M_n fait bien l'univers, et il ne peut pas faire deux activités en même temps, donc les événements donc bien deux à deux disjoints.
Donc $\boxed{\text{pour tout } n,\ (D_n, M_n, C_n) \text{ est un système complet d'événements}}$.
Alors, avec la formule des probabilités totales dans ce système complet, on a :

$$\mathbf{P}(D_{n+1}) = \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}_{D_n}(D_{n+1}) + \mathbf{P}(M_n)\mathbf{P}_{M_n}(D_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(D_{n+1})$$
$$d_{n+1} = d_n \times \tfrac{9}{10} + m_n \times \tfrac{7}{10} + c_n \times \tfrac{8}{10}$$

On a donc bien $\boxed{d_{n+1} = \frac{9}{10}d_n + \frac{7}{10}m_n + \frac{8}{10}c_n}$.

De même, $\mathbf{P}(M_{n+1}) = \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}_{D_n}(M_{n+1}) + \mathbf{P}(M_n)\mathbf{P}_{M_n}(M_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(M_{n+1})$

$$m_{n+1} = d_n \times \tfrac{1}{20} + m_n \times 0 + c_n \times 0$$

Donc $\boxed{m_{n+1} = \frac{1}{20}d_n}$.

Et $\mathbf{P}(C_{n+1}) = \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}_{D_n}(C_{n+1}) + \mathbf{P}(M_n)\mathbf{P}_{M_n}(C_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1})$

$$c_{n+1} = d_n \times \tfrac{1}{20} + m_n \times \tfrac{3}{10} + c_n \times \tfrac{2}{10}$$

Donc $\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{20}d_n + \frac{3}{10}m_n + \frac{2}{10}c_n}$.

3. Le hamster choisit sa première activité de manière équiprobable par rapport au trois possibles, donc $\boxed{X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix}d_{n+1}\\m_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{10}d_n + \frac{7}{10}m_n + \frac{8}{10}c_n\\ \frac{1}{20}d_n + 0m_n + 0c_n\\ \frac{1}{20}d_n + \frac{3}{10}m_n + \frac{2}{10}c_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{10} & \frac{7}{10} & \frac{8}{10}\\ \frac{1}{20} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_n\\m_n\\c_n\end{pmatrix} = HX_n \text{ avec } \boxed{H = \begin{pmatrix}\frac{9}{10} & \frac{7}{10} & \frac{8}{10}\\ \frac{1}{20} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10}\end{pmatrix}}.$$

4. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n) : X_n = H^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $H^0 = I$ donc $H^0 X_0 = IX_0 = X_0$: l'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $X_k = H^k X_0$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $X_k = H^k X_0$.
Donc $HX_k = H(H^k X_0) = HH^k X_0 = H^{k+1} X_0$.
Or, d'après la question précédente, $HX_k = X_{k+1}$, donc $X_{k+1} = H^{k+1} X_0$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = H^n X_0}$.