Corrigé du DM n°22

Correction 1.

1. $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$, donc par composition $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

2. $u_n = \frac{3}{e^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, donc par inverse, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3. $u_n = \dfrac{e^n(\frac{4}{e^n} - 1)}{n^3(2 + \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3})} = \dfrac{e^n}{n^3} \times \dfrac{\frac{4}{e^n} - 1}{2 + \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3}}$

$\star$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n^3} = +\infty$ (théorème des croissances comparées)

$\star$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{e^n} - 1 = -1 \text{ (inverse puis somme)} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{4}{n^3} = 2 \text{ (limites usuelles et somme)} \end{array}\right\}$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{4}{e^n} - 1}{2 + \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3}} = -\dfrac{1}{2}$

Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

4. $u_n = \dfrac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \dfrac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} + n = +\infty$.

Donc par inverse, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

5. Par définition, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$
De même, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$.

On ajoute les inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(kx - 1) < \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx$,

et pour $n \geqslant 1$, $n^2 > 0$ donc $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx - 1) < u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$.

• $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx = \frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{x}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = x\frac{n^2+n}{2n^2}$.

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n}{2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x\dfrac{n^2+n}{2n^2} = \dfrac{x}{2}$.

• $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx - 1) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} kx - n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx - \frac{1}{n}$, donc d'après ce qui précède et avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$,

on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx - 1) = \frac{x}{2}$.

Donc par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{x}{2}}$.

Correction 2.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} u_{n+1} - 3 &= \frac{u_n + 3n + 3}{n+2} - 3 \\ &= \frac{u_n + 3n + 3}{n+2} - \frac{3n+6}{n+2} \\ &= \frac{u_n - 3}{n+2} \end{aligned}$$

Or $n + 2 \geqslant 2 > 0$ donc $0 < \dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $0 < \left|\dfrac{1}{n+2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

On multiplie par $|u_n - 3|$, on obtient $\left|\dfrac{u_n - 3}{n+2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - 3|$, c'est-à-dire $\boxed{|u_{n+1} - 3| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - 3|}$.

2. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $|u_n - 3| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Initialisation : $|u_0 - 3| = |1 - 3| = |-2| = 2$ et $\frac{1}{2^{0-1}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$.
Et $2 \leqslant 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $|u_k - 3| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $|u_k - 3| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, donc $\frac{1}{2}|u_k - 3| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k-1}}$ soit $\frac{1}{2}|u_k - 3| \leqslant \frac{1}{2^{k+1-1}}$.
Or d'après la question précédente, $|u_{k+1} - 3| \leqslant \frac{1}{2}|u_k - 3|$.
Donc (par transitivité de la relation $\leqslant$) $|u_{k+1} - 3| \leqslant \frac{1}{2^{k+1-1}}$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u - n - 3| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}}$.

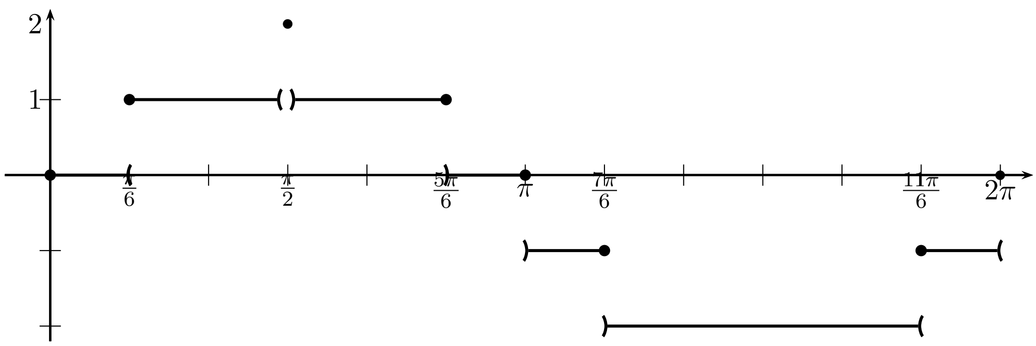
3. $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$.
Donc d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 3}$.

Correction 3.

1.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

2.



$\lfloor -1, 3 \rfloor = -2$
(et non -1)