Corrigé du DM n°21

Correction 1.

On note $J = A - I$, alors $A = I + J$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ convient.

Alors $A^n = (I+J)^n$ et $IJ = J$ et $JI = J$, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k$.

Or $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $J^3 = J^2 J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3,3}$.

Ainsi, $\forall k \geqslant 3, J^k = \mathbf{0}_{3,3}$.

Donc pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k \\ &= 1 I^n J^0 + n I^{n-1} J^1 + \tfrac{n(n-1)}{2} I^{n-2} J^2 \\ &= II + nIJ + \tfrac{n(n-1)}{2} IJ^2 \\ &= I + nJ + \tfrac{n(n-1)}{2} J^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Et $\boxed{\text{pour } n = 1,\ A^n = A \text{ et pour } n = 0,\ A^n = I}$.

Correction 2.

1. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$.

Initialisation : $M^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b_0 = 1$ et $a_0 = 0$ donc $\begin{pmatrix} b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $M^k = \begin{pmatrix} b_k & a_k \\ 0 & b_k \end{pmatrix}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$M^{k+1} = M^k \times M$ donc en utilisant $\mathcal{P}(k)$,

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= \begin{pmatrix} b_k & a_k \\ 0 & b_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b_k + 0a_k & b_k + 2a_k \\ 2 \times 0 + 0b_k & 0 + 2b_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{k+1} & a_{k+1} \\ 0 & b_{k+1} \end{pmatrix} \text{ par définition de } (a_n) \text{ et } (b_n) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}}$.

2. (b_n) est une suite géométrique de raison 2 donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = b_0 \times 2^n = \boxed{2^n}$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{2a_n + 2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{2a_n}{2^{n+1}} + \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2} = c_n + \dfrac{1}{2}$.

Donc $\boxed{(c_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{1}{2}}$.

(b) Donc $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = c_0 + \frac{1}{2}n = \frac{a_0}{2^0} + \frac{1}{2}n = \boxed{\frac{1}{2}n}$.

Donc $a_n = c_n \times 2^n = \frac{1}{2}n \times 2^n = \boxed{n2^{n-1}}$.

4. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

5. (a)

$$\begin{aligned}
(P|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \qquad P \text{ est de rang 2 et de taille 2 donc inversible} \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

(b) $P^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 - 1 & 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M$.

Donc $\boxed{P^{-1}AP = M}$.

(c) On note $\mathcal{P}(n)$ l'égalité $M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation : $M^0 = I$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $M^k = P^{-1}A^kP$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$M^{k+1} = M^kM$, or par hypothèse, $M^k = P^{-1}A^kP$, et d'après la question précédente, $M = P^{-1}AP$.
Donc $M^{k+1} = P^{-1}A^kPP^{-1}AP = P^{-1}A^kIAP = P^{-1}A^kAP = P^{-1}A^{k+1}P$ CQFD.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P^{-1}A^nP}$.

(d) Donc $PM^n = PP^{-1}A^nP = IA^nP = A^nP$ donc $PM^nP^{-1} = A^nPP^{-1} = A^nI = A^n$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc} \quad A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} + 2^n \\ -2^n & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n+2 \\ -2 & -n+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 + \frac{n+2}{2} & -1 + \frac{n+2}{2} \\ -1 + \frac{-n+2}{2} & 1 + \frac{-n+2}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 + \frac{n}{2} & \frac{n}{2} \\ -\frac{n}{2} & 2 - \frac{n}{2} \end{pmatrix}}$.

Correction 3.

1. On effectue p tirages avec remise donc chaque issue est un p-uplet d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
$\boxed{\text{Il y a donc } n^p \text{ issues possibles.}}$

2. A est donc l'ensemble des p-uplets d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$,
donc $\text{card}(A) = n(n-1)\dots(n-p+1)$.
Or les boules sont identiques donc toutes les issues sont équiprobables.
Donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \boxed{\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n^p}}$.

3. B est le contraire de A donc $\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(A)$ donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = 1 - \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n^p}}$.

Correction 4.

1. Chaque issue est une 4-liste d'éléments de $[\![1, 6]\!]$, donc $\Omega = [\![1, 6]\!]^4$.
Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = 6^4$.
On note S l'événement « avoir au moins un 6 », alors $\overline{S}$ est « ne pas avoir de 6 », autrement dit « avoir un nombre entre 1 et 5 à chaque tirage », donc $\overline{S} = [\![1, 5]\!]^4$ donc $\text{Card}(\overline{S}) = 5^4$.
Le dé est équilibré donc on est dans une situation d'équiprobabilité, donc $\mathbf{P}(\overline{S}) = \frac{5^4}{6^4}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(S) = 1 - \frac{5^4}{6^4}}$.

2. **(a)** Chaque lancer de deux dés a pour issue un couple de deux nombres entiers entre 1 et 6, autrement dit l'ensemble des issues pour un lancer de deux dés est $[\![1, 6]\!]^2$.
On répète cette expérience 24 fois à la suite, les résultats pouvant être identiques d'une fois sur l'autre, donc les issues sont les 24-listes d'éléments de $[\![1, 6]\!]^2$.
Donc $\boxed{\Omega = \left([\![1, 6]\!]^2\right)^{24}}$, et donc $\boxed{\text{Card}(\Omega) = \left(6^2\right)^{24} = 36^{24}}$.

(b) On note S_2 l'événement « obtenir au moins un double 6 », alors $\overline{S_2}$ est « ne pas obtenir de double 6 », donc $\overline{S_2} = \left([\![1, 6]\!]^2 \setminus \{(6, 6)\}\right)^{24}$.
Donc $\text{Card}(\overline{S_2}) = 35^{24}$.
Les issues sont équiprobables donc comme en **1.**, on obtient $\boxed{P(S_2) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}}}$.

3. **(a)**
```
from random import *

def lancers():
    for k in range(4):
        x=randint(1,6)
        if x==6:
            return 1
    return 0


s=0
for k in range(10000):
   s=s+lancers()
s=s/10000
print('la proportion de fois ou on a au moins un 6 sur les 4 lancers est',s)

1-5**4/6**4
```

Les deux résultats (théorique d'après la question **1.** et la simulation) sont proches.

Historique : *la comparaison des probabilités du **1.** et du **2.** est un problème connu sous le nom de problème du Chevalier de Méré (17ème siècle). L'intérêt vient du fait qu'une approche rapide pourrait conclure que les deux événements ont la même probabilité car la probabilité de faire 6 à un lancer est $\frac{1}{6}$, celle de faire un double 6 est $\frac{1}{36}$ soit $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ donc on pourrait dire que si on fait 6 fois plus d'essais ($24 = 4\times 6$) on a autant de chances. Pourtant les observations concrètes faites avec les dés donnaient un avantage à la 1ère situation. Ce problème est un des problèmes fondateurs de la théorie des probabilités.*

Correction 5.

1. (a) On factorise $2X^2-3X-2$.
$\Delta = (-3)^2-4\times 2\times(-2) = 9+16 = 25 = 5^2$ donc $X_1 = \frac{3-5}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{3+5}{2\times 2} = 2$.
Donc $2X^2-3X-2 = 2(X+\frac{1}{2})(X-2)$.
Donc $2\sin^2(x)-3\sin(x)-2=0 \iff 2(\sin(x)+\frac{1}{2})(\sin(x)-2)=0$
$\iff \sin(x) = -\frac{1}{2}$ ou $\sin(x)=2$
Or $\sin(x)=2$ n'a pas de solution (la fonction sinus est bornée par -1 et 1).
Et $\sin(x) = -\frac{1}{2} \iff \sin(x) = \sin(-\frac{\pi}{6})$
$\iff \exists k\in\mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x = \pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

(b) On factorise $2X^2-7X+6$: $\Delta = (-7)^2-4\times 2\times 6 = 49-48 = 1$.
Donc $X_1 = \frac{7-1}{2\times 2} = \frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{7+1}{2\times 2} = 2$.
Donc $2X^2-7X+6 = 2(X-\frac{3}{2})(X-2)$.
Donc avec $X = x^2$, on a :
$2x^4-7x^2+6 = 2(x^2-\frac{3}{2})(x^2-2) = 2(x-\sqrt{\frac{3}{2}})(x+\sqrt{\frac{3}{2}})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x^4-7x^2+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[}$.

(c) $|x-2|>1 \iff x-2>1$ ou $x-2<-1$
$\iff x>3$ ou $x<1$ donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,1[\cup]3,+\infty[}$.

2. (a) ⋆ $2x-5>0 \iff 2x>5 \iff x>\frac{5}{2}$
⋆ $\ln(2x^2-12x+\frac{37}{2})>0 \iff 2x^2-12x+\frac{37}{2}>1$ car $e^0=1$ et exp strictement croissante
$\iff 2x^2-12x+\frac{35}{2}>0$
$\Delta = (-12)^2-4\times 2\times\frac{35}{2} = 4 = 2^2$ donc $x_1 = \frac{12-2}{2\times 2} = \frac{5}{2}$ et $x_2 = \frac{12+2}{4} = \frac{7}{2}$
Et $a = 2>0$, donc « $+0-0+$ ».
Donc

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(2x^2-12x+\frac{37}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(2x-5)\ln(2x^2-12x+\frac{37}{2})$		$-$	0	$-$	0	$+$	

(b) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{-2x+1} = \dfrac{-2x+1-(x+3)}{(x+3)(-2x+1)} = \dfrac{-3x-2}{(x+3)(-2x+1)}$.

Donc

x	$-\infty$		-3		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-3x-2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1}{x+3}-\frac{1}{-2x+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

(c) $3xe^{2x}+x^2e^{2x}=xe^{2x}(3+x)$
Donc

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
e^{2x}		$+$		$+$		$+$	
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$xe^{2x}+x^2e^{2x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. (a) On cherche z sous forme $z=a+ib$.
Alors $z^2=5-12i \iff (a+ib)^2=5-12i \iff a^2+2abi-b^2=5-12i \iff \begin{cases} a^2-b^2=5 & (1) \\ 2ab=-12 & (2) \end{cases}$
De plus, $|z^2|=|5-12i|$ et $|z^2|=a^2+b^2$ et $|5-12i|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$.
Donc $a^2+b^2=13 \quad (3)$.
Avec $(1)+(3)$ on a $2a^2=5+13=18$ donc $a^2=9$ donc $a=3$ ou $a=-3$.
Pour $a=3$ dans (2), $6b=-12$ donc $b=-2$ et avec $a=-3$, $-6b=-12$ donc $b=2$.
Donc $\boxed{\mathcal{S}=\{3-2i;-3+2i\}}$.

(b) On résout $Z^4=16$.
Or $16=2^4e^{i0}$ donc $Z^4=16 \iff Z=2e^{i0}$ ou $Z=2e^{i\frac{2\pi}{4}}$ ou $Z=2e^{i\frac{4\pi}{4}}$ ou $Z=2e^{i\frac{6\pi}{4}}$,
$\iff Z=2$ ou $Z=2i$ ou $Z=-2$ ou $Z=-2i$.
Ainsi, avec $Z=1+z$, on trouve $\boxed{\mathcal{S}=\{1;-1+2i;-3;-1-2i\}}$.