Corrigé du DM n°19

Correction 1.

1. $i^3 + (3-i)i^2 + (4-3i)i - 4i = -i - 3 + i + 4i + 3 - 4i = 0.$
Donc $\boxed{i \text{ est solution de } (E)}$.

2. *On trouve* $\boxed{z^3 + (3-i)z^2 + (4-3i)z - 4i = (z-i)(z^2+3z+4)}$.

3. Pour $z + 3z + 4$: $\Delta = -7$ donc $z_1 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Donc $\boxed{z^3 + (3-i)z^2 + (4-3i)z - 4i = (z-i)(z-(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}))(z-(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})).}$
Donc $(E) \iff (z-i)(z-(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}))(z-(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})) = 0 \iff x = i$ ou $x = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$
$\boxed{\mathcal{S} = \left\{i; -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}}$

Correction 2.

1.
$$\begin{aligned}
\sin^6(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^6 \\
&= \frac{1}{(2i)^6}\Big(e^{6ix} + 6(e^{ix})^5(-e^{-ix}) + 15(e^{ix})^4(-e^{-ix})^2 + 20(e^{ix})^3(-e^{-ix})^3 + 15(e^{ix})^2(-e^{-ix})^4 \\
&\qquad + 6(e^{-ix})(-e^{ix})^5 + (-e^{-ix})^6\Big) \\
&= \frac{1}{(2i)^6}\Big(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\Big) \\
&= \frac{1}{2^5 \times i^6}\Big(2\cos(6x) - 6 \times 2\cos(4x) + 15 \times 2\cos(2x) - 20\Big) \\
&= \frac{1}{2^5 \times (-1)}\Big(\cos(6x) - 6\cos(4x) + 15\cos(2x) - 10\Big) \\
&= \boxed{-\frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) - \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}}
\end{aligned}$$

Une primitive de f est $\boxed{F : x \mapsto -\frac{1}{192}\sin(6x) + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{15}{64}\sin(2x) + \frac{5}{16}x}$.

2. $\Delta = (-(2-i))^2 - 4 \times (2-4i) = 4 - 4i - 1 - 8 + 16i = -5 + 12i.$

On cherche δ tel que $\delta^2 = \Delta$, sous forme $\delta = x + iy$.
Alors $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ donc en identifiant parties réelles et imaginaires :
$$\delta^2 = -5 + 12i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (1) \\ 2xy = 12 & (2) \end{cases}$$
De plus, $|\delta^2| = |\delta|^2 = x^2 + y^2$ et $|-5+12i| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ donc $x^2 + y^2 = 13$ (3).
Donc d'après (1) + (3), on a $2x^2 = 8$ soit $x^2 = 4$, on peut donc prendre $x = 2$, alors d'après (2), $4y = 12$ donc $y = 3$.
On prend $\delta = 2 + 3i$.

Alors les deux solutions sont $z_1 = \dfrac{(2-i)-(2+3i)}{2} = \dfrac{-4i}{2} = -2i$
et $z_2 = \dfrac{(2-i)+(2+3i)}{2} = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i.$ $\boxed{\mathcal{S} = \{-2i; 2+i\}}$

Attention : *ne pas mélanger la recherche de δ et celle de z. Bien distinguer les deux noms ! Pour δ, on ne cherche pas toutes les solutions, une seule suffit. Adaptez la rédaction !*

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k\right).$

Or
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k&=\frac{1-(e^{i\frac{\pi}{n}})^{n-1+1}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\\&=\frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}&&e^{i\pi}=-1\\&=\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}(e^{-i\frac{\pi}{2n}}-e^{i\frac{\pi}{2n}})}&&\textit{factorisation par } e^{i\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{-2i\sin(\frac{\pi}{2n})}&&\frac{1}{i}=-i\\&=\frac{i\left(\cos(-\frac{\pi}{2n})+i\sin(-\frac{\pi}{2n})\right)}{\sin(\frac{\pi}{2n})}\\&=1+i\frac{\cos(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k\right)=\frac{\cos(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$, donc $\displaystyle\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$.

Correction 3.

1. $(\mathcal{E}_2) : \displaystyle\sum_{k=0}^{2}z^k=0$ c'est-à-dire $z^2+z+1=0$

$\Delta=1^2-4=-3=(i\sqrt{3})^2$ donc $z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$.

2. **(a)** Pour $z\neq 1$, $\displaystyle\boxed{\sum_{k=0}^{n}z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}}$.

Or $z=1$ n'est pas une solution de $(\mathcal{E}_n)$ car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}1^k=n+1\neq 0$.

Donc pour $z\neq 1$:
$$\begin{aligned}(\mathcal{E}_n)&\iff\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=0\\&\iff 1-z^{n+1}=0\\&\iff z^{n+1}=1\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},\ k\in[\![1,n]\!]\right\}}$ (on enlève $k=0$ car cela donne 1, que l'on a exclu).

(b) Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}=e^{\frac{2i\pi}{n+1}}\frac{1-e^{\frac{2in\pi}{n+1}}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n+1}}}=\ldots=-\frac{\sin(\frac{n\pi}{n+1})}{\sin(\frac{\pi}{n+1})}$ (factorisation par l'angle moitié)

Or $\sin(\frac{\pi}{n+1})=\sin(\pi-\frac{\pi}{n+1})=\sin(\frac{n\pi}{n+1})$ donc $\displaystyle\boxed{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=-1}$.

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\alpha_k=e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{2ik\pi}{n+1}}$ or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2ik\pi}{n+1}=\frac{2i\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{2i\pi}{n+1}\frac{n(n+1)}{2}=in\pi$ donc $\displaystyle\boxed{\prod_{k=1}^{n}\alpha_k=e^{in\pi}=(-1)^n}$.