Corrigé du DM n°18

Correction 1.

⋆ Le centre de la sphère est le milieu de $[AB]$, que l'on note I.
On a $x_I = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2}$, $y_I = \frac{1+5}{2} = 3$ et $z_I = \frac{-5-2}{2} = -\frac{7}{2}$.

⋆ Le rayon est $\frac{1}{2}AB$.
$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(0+3)^2+(5-1)^2+(-2+5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+16+9} = \frac{\sqrt{34}}{2} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

Donc $\boxed{\text{une équation de la sphère est } (x+\frac{3}{2})^2+(y-3)^2+(z+\frac{7}{2})^2 = \frac{17}{2}}$.

$\mathcal{P}$ passe par B et est normal à $\overrightarrow{IB}$.

Donc $M(x,y,z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BM} = 0 \iff \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-5 \\ z+2 \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{3}{2}x + 2y + \frac{3}{2}z - 7 = 0$

$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{P} \text{ est } \frac{3}{2}x+2y+\frac{3}{2}z-7=0.}$

Correction 2.

On note $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Alors $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$. Et $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La droite que l'on cherche étant perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de cette droite.
Ainsi, la droite cherchée passe par D et a pour vecteur directeur $\vec{n}$.

Un système d'équations paramétriques est donc $\boxed{\begin{cases} x = -3t \\ y = -6t+1 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t-2 \end{cases}}$.

Correction 3.

1. On note H le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.

⋆ $\underline{\overrightarrow{AH} \text{ est normal au plan } \mathcal{P}}$ donc $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec{n}$ donc $\begin{cases} x_H = 2\lambda+3 \\ y_H = -\lambda \\ z_H = 3\lambda+1 \end{cases}$.

⋆ $\underline{H \text{ est dans le plan } \mathcal{P}}$ donc

$$\begin{aligned} \vec{n}.\overrightarrow{DH} &= 0 \\ 2x_H - (y_H-1) + 3(z_H-1) &= 0 \\ 2x_H - y_H + 3z_H - 2 &= 0 \\ 2(2\lambda+3) - (-\lambda) + 3(3\lambda+1) - 2 &= 0 \\ 4\lambda + \lambda + 9\lambda + 6 + 3 - 2 &= 0 \\ 14\lambda &= -7 \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

⋆ Donc $x_H = 2 \times (-\frac{1}{2}) + 3 = 2$, $y_H = \frac{1}{2}$ et $z_H = -\frac{3}{2}+1 = -\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\text{le projeté orthogonal de } A \text{ sur } \mathcal{P} \text{ a pour coordonnées } (2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}$.

2. On note K ce projeté.

⋆ $\underline{K \text{ est sur la droite } \mathcal{D}}$ donc il existe un réel λ tel que $\begin{cases} x_K = \lambda+1 \\ y_K = 3\lambda+1 \\ z_K = 2\lambda \end{cases}$.

⋆ <u>$\overrightarrow{BK}$ est normal à $\mathcal{D}$</u>

Or $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, donc $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{v} = 0$.

$\overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 - 0 \\ 3\lambda + 1 + 1 \\ 2\lambda - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 3\lambda + 2 \\ 2\lambda - 2 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{v} = \lambda + 1 + 3(3\lambda + 2) + 2(2\lambda - 2) = 14\lambda + 3$.

Donc $\lambda = -\frac{3}{14}$

⋆ Donc $x_K = -\frac{3}{14} + 1 = \frac{11}{14}$, $y_K = -\frac{9}{14} + 1 = \frac{5}{14}$ et $z_k = -\frac{3}{7}$.

$\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } B \text{ sur la droite } D \text{ a pour coordonnées } (\frac{11}{14}, \frac{5}{14}, -\frac{3}{7}).}$

La sphère de centre B tangente à D a pour rayon BK.

$BK = \sqrt{\left(\frac{11}{14}\right)^2 + \left(\frac{5}{14} + 1\right)^2 + \left(\frac{-3}{7} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{196} + \frac{361}{196} + \frac{1156}{196}} = \sqrt{\frac{117}{14}}$.

Donc $\boxed{\text{une équation de la sphère est } x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{117}{14}}$