Corrigé du DM n°17

Correction 1. (réponses)

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 11 - 2n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{13} u_k = -28$ et $\displaystyle\sum_{n=3}^{22} u_n = -280$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6 \times \frac{1}{3^{n-1}}$ et $v_0 = 18$ et pour $n > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 27\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ et $\displaystyle\sum_{p=4}^{11} v_p = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^8}\right)$.

Correction 2.

1. $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \tfrac{1}{3}(2u_n + v_n) - \tfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ &= \tfrac{1}{3}(2u_n + v_n - u_n - 2v_n) \\ &= \tfrac{1}{3}(u_n - v_n) \\ &= \tfrac{1}{3}t_n \qquad \text{Donc } \boxed{(t_n) \text{ est géométrique de raison } \tfrac{1}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \tfrac{1}{3}(2u_n + v_n + u_n + 2v_n) \\ &= \tfrac{1}{3}(3u_n + 3v_n) \\ &= u_n + v_n \\ &= s_n \qquad \text{Donc } \boxed{(s_n) \text{ est géométrique de raison } 1}. \end{aligned}$$

2. $t_0 = u_0 - v_0 = -1$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
Et (s_n) étant géométrique de raison 1, c'est une suite constante, et $s_0 = u_0 + v_0 = 3$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 3}$.

3. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n & (1) \\ u_n + v_n = 3 & (2) \end{cases}$.
$(1) + (2)$ donne $2u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ donc $u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Et $(2) - (1)$ donne $2v_n = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $v_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } v_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

Correction 3.

(réponse) (S_1) : $\boxed{\mathcal{S} = \{(-1, 0, 4)\}}$.

$$(S_2) : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y + z = 7 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 3 & \\ 3y = 4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2y + z = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

D'après L_2, $y = \frac{4}{3}$, donc dans L_3, $2 \times \frac{4}{3} + z = -2$ donc $z = -2 - \frac{8}{3} = -\frac{14}{3}$
donc dans L_1 : $x - \frac{4}{3} - \frac{14}{3} = 3$ donc $x = \frac{9}{3} + \frac{18}{3} = \frac{27}{3} = 9$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{(9, \frac{4}{3}, -\frac{14}{3})\}}$.

Correction 4.

1. **(a)** Pour former un cocktail, un élève doit choisir 4 ingrédients différents parmi les 11 disponibles, il peut les choisir simultanément car l'ordre ne compte pas.
Chaque cocktail est donc une partie de 4 ingrédients parmi les 11.
Il y en a donc $\binom{11}{4}$ possibles.
Et $\binom{11}{4} = \dfrac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 10 \times 3 = 330$
$\boxed{\text{On a donc 330 cocktails possibles.}}$

(b) Pour former un cocktail non gazeux, il faut éliminer les 2 boissons gazeuses et procéder comme précédemment, avec les 9 ingrédients possibles.
Cela fait donc $\binom{9}{4}$ possibilités et $\binom{9}{4} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3 \times 7 \times 6 = 126.$
$\boxed{\text{On peut faire 126 cocktails non gazeux.}}$

(c) Les cocktails qui ne conviennent pas sont ceux qui n'ont pas de sirop.
Pour former un tel cocktail, on choisit les 4 ingrédients parmi les 8 qui ne sont pas des sirops, cela fait $\binom{8}{4}$ possibilités, et $\binom{8}{4} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5 = 70.$
Les cocktails avec au moins un sirop forment le complémentaire de ceux qui n'ont pas de sirop.
Donc $\boxed{\text{il y a } 330 - 70 \text{ soit 260 cocktails avec au moins un sirop}}$.

(d) On choisit les 3 jus de fruits parmi les 5, simultanément, donc il y a $\binom{5}{3}$ choix possibles, soit $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ possibilités.
Pour chacune de ces possibilités, il y a trois choix de sirop possibles, donc 3 cocktails possible par groupe de 3 jus de fruits.
Donc $\boxed{\text{il y a } 3 \times 10 \text{ soit 30 cocktails avec 3 jus de fruits et 1 sirop}}$.

2. **(a)** Faire le choix pour Arthur et Brigitte revient à choisir successivement (dans l'ordre des étudiants) 2 desserts dans les 5 types possibles.
On forme donc une $2-$liste d'éléments distincts parmi le 5 desserts.
$\boxed{\text{Il y a donc } 5^2 \text{ soit 25 possibilités.}}$

(b) S'ils ne prennent pas le même, alors on forme une 2-liste d'éléments distincts, cela fait 5×4 donc $\boxed{\text{20 choix possibles}}$.

(c) Il y a deux cas :
- ⋆ avec le gâteau au chocolat : il faut l'accompagner du seul dessert qui n'est ni un gâteau, ni au chocolat (salade de fruits). Il y a donc deux possibilités dans ce cas : le gâteau au chocolat pour Arthur et la salade de fruits pour Brigitte, ou le contraire.
- ⋆ sans le gâteau au chocolat : il faut donc un gâteau aux pommes, et un dessert au chocolat qui n'est pas un gâteau (tarte ou éclair). Si Arthur a le gâteau et Brigitte le dessert au chocolat, cela fait 2 possibilités, et on peut échanger les desserts entre Arthur et Brigitte, donc on a au total 4 possibilités dans ce cas.

Donc au total $\boxed{\text{6 possibilités avec exactement un gâteau et un dessert au chocolat}}$.