Corrigé du DM n°15

Correction 1.

$f = \arctan(u)$ avec $u(x) = x + \frac{1}{x}$.

u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$,

et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+(x+\frac{1}{x})^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2\left(1+(x+\frac{1}{x})^2\right)}$.

x^2-1 a pour racines 1 et -1, et $a = 1 > 0$, on en déduit :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x^2\left(1+(x+\frac{1}{x})^2\right)$		$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\arctan(-2)$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ $\Vert$ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\arctan(2)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty$ (somme) et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \arctan(X) = -\frac{\pi}{2}$, donc par composition, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}}$.

$\displaystyle\lim_{x\to0^-} x + \frac{1}{x} = -\infty$ (somme) donc de même, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \arctan(-x + \frac{1}{-x}) = \arctan(-(x+\frac{1}{x})) = -\arctan(x+\frac{1}{x}) = -f(x)$ donc f est impaire, on en déduit les limites en 0^+ et $+\infty$ indiquées dans le tableau.

Correction 2.

$I_1 = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

$I_2 = \Big[\arccos(x)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \arccos(-\frac{1}{2})$.

$\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$ car $\frac{\pi}{4} \in [0,\pi]$ et $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ car $\frac{2\pi}{3} \in [0,\pi]$ et $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.

Donc $I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \boxed{-\frac{5\pi}{12}}$.

Correction 3.

- *plusieurs façons de rédiger cette question : dans tous les cas, il faut dire que* $-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *et utiliser l'injectivité ou la bijectivité d'arcsin, ou de* $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

  $-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, et $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $-\frac{\pi}{4} = \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

  Donc $\arcsin(x) = -\frac{\pi}{4} \iff \arcsin(x) = \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ et arcsin est injective donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$.
- $-\frac{\pi}{4} \notin [0,\pi]$ et arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.
- $\arcsin(\frac{1}{4}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $2\arcsin(\frac{1}{4}) \in [0,\pi]$, et $\arccos(x) \in [0,\pi]$ aussi.

  Or cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$,

  $$\begin{aligned} \text{donc} \quad \arccos(x) = 2\arcsin(\tfrac{1}{4}) &\iff \cos(\arccos(x)) = \cos(2\arcsin(\tfrac{1}{4})) \ . \\ &\iff x = 1 - 2\sin^2(\arcsin(\tfrac{1}{4})) \\ &\iff x = 1 - 2 \times \tfrac{1}{16} \\ &\iff x = \tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{8}\right\}}$.

Correction 4. **réponses (attention, il y a plusieurs réponses possibles à chaque fois !)**

1.
- vecteur directeur : $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$
- vecteur normal : $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$
- équation cartésienne : $4x+y-11=0$
- système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=4t+3 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

2.
- vecteur directeur : $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
- vecteur normal : $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$
- équation cartésienne : $3x-2y+5=0$
- système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=\frac{2}{3}t-\frac{5}{3} \\ y=t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

3.
- vecteur directeur : $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$
- vecteur normal : $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
- équation cartésienne : $x+2y-7=0$
- système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=1+4t \\ y=3-2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.