Corrigé du DM n°15

Correction 1.

1. Le centre du cercle est le milieu de $[AB]$, on le note I.
$\frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$ et $\frac{1+(-1)}{2} = 0$ donc I a pour coordonnées $(5, 0)$.
D'autre part, le rayon est la longueur AI et $AI = \sqrt{(5-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.
Finalement, une équation de $\mathcal{C}_1$ est $(x-5)^2 + y^2 = \sqrt{5}^2$
En développant : $x^2 - 10x + 25 + y^2 = 5$ soit $\boxed{x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0}$.

2. $x^2 - 8x = x^2 - 2 \times 4x + 4^2 - 4 = (x-4)^2 - 16$
$y^2 + y = y + 2 \times \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0 &\Longleftrightarrow (x-4)^2 - 16 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + 10 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-4)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = 16 + \tfrac{1}{4} - 10 \\ &\Longleftrightarrow (x-4)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{25}{4} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{cette équation est celle d'un cercle de centre } (4, -\frac{1}{2}) \text{ et de rayon } \frac{5}{4}}$.

Correction 2.

On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
⋆ $H \in \mathcal{D}$ donc $\det(\overrightarrow{CH}, \vec{v}) = 0$, donc $\begin{vmatrix} x_H - 1 & 2 \\ y_H - 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ soit $-(x_H - 1) - 2y_H = 0$
donc $-x_H - 2y_H + 1 = 0$.
⋆ $(AH) \perp \mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{AH}.\vec{v} = 0$ soit $\begin{pmatrix} x_H + 3 \\ y_H - 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ donc $2x_H + 6 - y_H + 4 = 0$
donc $2x_H - y_H + 10 = 0$.

On résout $\begin{cases} -x - 2y + 1 = 0 & (1) \\ 2x - y + 10 = 0 & (2) \end{cases}$
$2(1) + (2)$ donne $-2x - 4y + 2 + 2x - y + 10 = 2 \times 0 + 0$ donc $-5y + 12 = 0$ soit $y = \frac{12}{5}$.
Alors dans (1) : $-x - \frac{24}{5} + 1 = 0$ donc $x = -\frac{19}{5}$.
Donc $\boxed{H(-\frac{19}{5}, \frac{12}{5})}$.

$$d(A, \mathcal{D}) = \sqrt{\left(-3 + \frac{19}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{5}}}.$$

Correction 3. réponses (attention, il y a plusieurs réponses possibles à chaque fois !)

1.
- vecteur directeur : $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- vecteur normal : $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- équation cartésienne : $4x + y - 11 = 0$
- système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

2.
- vecteur directeur : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- vecteur normal : $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- équation cartésienne : $3x - 2y + 5 = 0$
- système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = \frac{2}{3}t - \frac{5}{3} \\ y = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

3.
- vecteur directeur : $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
- vecteur normal : $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- équation cartésienne : $x + 2y - 7 = 0$
- système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Correction 4.

1.
$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)\left(1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}\right)} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{1 - \tan(a)\tan(b)} \\
&= \boxed{\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}
\end{aligned}$$