Devoir Maison n°14

pour Lundi 6 janvier 2025, 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $2^n = 3n + 1$.
$\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ? Justifier votre affirmation.

2. On note $\mathcal{P}(n) : 10n^2 - 3n + 2 \leqslant n^3$.
Écrire $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(10)$, et déterminer si elles sont vraies ou fausses en le justifiant.

3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$.
On note $\mathcal{P}(n) : u_n = 4 \times 3^n - 1$.
Écrire $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(2)$ et déterminer si elles sont vraies ou fausses en le justifiant.

Exercice 2.

1. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = \dfrac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = (v_n)^2$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{3^{2^n}}$.

Exercice 3.

1. Calculer $(1 - \sqrt{2})^6$.

2. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=8}^{31} \frac{k-5}{6} \quad ; \quad S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} (2^k + 4k + n - 3) \quad ; \quad S_3(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}.$$

3. En faisant apparaître une somme télescopique (que l'on justifiera soigneusement), calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{18} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

★ **4.** Soit N un entier naturel non nul.
Justifier que pour tout p de $[\![0, N]\!]$ et tout m de $[\![p, N]\!]$, $\dbinom{m}{p} = \dbinom{m+1}{p+1} - \dbinom{m}{p+1}$.
En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{m=p}^{N} \binom{m}{p}$ en fonction de N et p.
(on considère que si $x > y$, $\binom{y}{x} = 0$)

Exercice 4.

Le but est de résoudre l'équation différentielle $(E) \quad y'' - y = xe^x$ où l'inconnue est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1. Montrer que la fonction $y_p(x) = \lambda(x)e^x$ est une solution particulière de (E) si et seulement si λ' est solution de l'équation $(F) : z' + 2z = x$.
Chercher une solution de cette équation (F) sous forme $x \mapsto ax + b$ (on cherche a et b) et en déduire une solution particulière de (E).

2. Résoudre (E).

★ Exercice 5.

ω étant un nombre réel, on recherche les fonctions f définies sur $[0, \pi]$, à valeurs réelles, solutions de l'équation $y'' + \omega y = 0$ et vérifiant de plus $f(0) = f(\pi) = 0$

1. Trouver les fonctions f lorsque $\omega = 0$, puis lorsque $\omega < 0$.

2. Lorsque $\omega > 0$, montrer que ce problème a une solution non nulle si et seulement si $\omega = n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

★ Exercice 6.

L'application $g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 7.

Un lutin est chargé d'emballer dans l'ordre 10 cadeaux, numérotés de 1 à 10, pour aider le père Noël. Il a à sa disposition, et à volonté, du papier cadeau rouge, du vert, du blanc et du jaune. Pour chaque cadeau, le lutin choisit au hasard entre ces couleurs.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles pour l'emballage des dix cadeaux ?

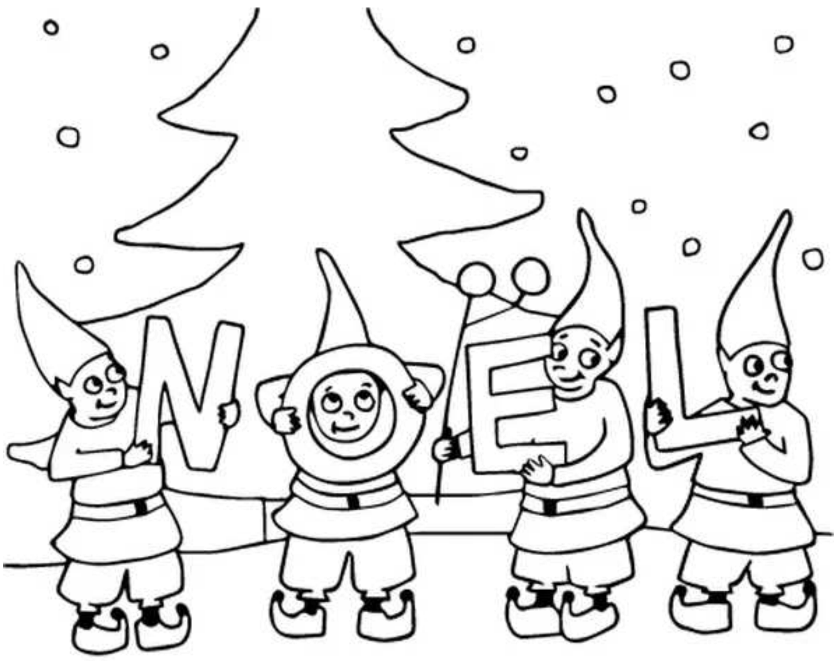
2. Combien y a-t-il de résultats pour lesquels au moins un cadeau est rouge ?

3. Le lutin appelle trois amis pour faire une photo au pied du sapin qu'il pourra partager sur son réseau social favori : chacun porte une lettre pour former le mot Noël.

(a) Ils commencent par colorier les lettres : ils ont 9 couleurs de feutre et décident que pour la beauté de la photo, il ne peuvent pas colorier deux lettres de la même couleur.
De combien de façons différentes peuvent-ils colorier les lettres ?

(b) Désormais, chaque lutin porte la lettre qu'il a coloriée. Mais ils ne sont pas très au point et ont du mal à se mettre dans le bon ordre. Ils décident de tester toutes les configurations possibles, et de prendre une photo à chaque fois (pour être sûrs que la photo qu'ils veulent sera bien prise). Combien de photos vont-ils prendre ?

BONUS. Combien de vues fera la photo sur leur réseau social ?



Bonnes vacances !