Corrigé du DM n°14

Correction 1.

1. $\mathcal{P}(2) : 2^2 = 3 \times 2 + 1$, or $2^2 = 4$ et $3 \times 2 + 1 = 7$, donc $\mathcal{P}(2)$ n'est pas vraie.
Donc $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ n'est pas vraie pour tous les entiers naturels } n}$.

2.
- $\boxed{\mathcal{P}(0) : 10 \times 0^2 - 3 \times 0 + 2 \leqslant 0^3}$ et $\boxed{\mathcal{P}(1) : 10 \times 1^2 - 3 \times 1 + 2 \leqslant 1^3}$.
- $10 \times 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$ et $0^3 = 0 < 2$ donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est fausse}}$.
- $10 \times 10^2 - 3 \times 10 + 2 = 1000 - 30 + 2 = 972$ et $10^3 = 1000$
  Or $972 \leqslant 1000$ donc $\boxed{\mathcal{P}(10) \text{ est vraie}}$.

3.
- $\boxed{\mathcal{P}(0) : u_0 = 4 \times 3^0 - 1}$ et $\boxed{\mathcal{P}(2) : u_2 = 4 \times 3^2 - 1}$
- $u_0 = 3$ et $4 \times 3^0 - 1 = 4 \times 1 - 1 = 3$ donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie}}$.
- $u_1 = 3u_0 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$ donc $u_2 = 3 \times 11 + 2 = 35$
  Et $4 \times 3^2 - 1 = 4 \times 9 - 1 = 35$.
  Donc $\boxed{\mathcal{P}(2) \text{ est vraie}}$.

Correction 2.

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$
$$1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell(\ell+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

D'après les propriétés de la somme, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k+1} \frac{1}{\ell(\ell+1)} = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell(\ell+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)}$.

Donc, en utilisant $\mathcal{P}(k)$, on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{k+1} \frac{1}{\ell(\ell+1)} &= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)} \\
&= 1 - \frac{(k+1)+1}{(k+1)((k+1)+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} \\
&= 1 + \frac{-(k+1)-1+1}{(k+1)((k+1)+1)} \\
&= 1 + \frac{-(k+1)}{(k+1)((k+1)+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{(k+1)+1} \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}}$.

2. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $v_n = \dfrac{1}{3^{2^n}}$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie : $v_0 = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3^{2^0}} = \dfrac{1}{3^1} = \dfrac{1}{3}$ donc $v_0 = \dfrac{1}{3^{2^0}}$ CQFD.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $v_k = \dfrac{1}{3^{2^k}}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par définition de la suite, $v_{k+1} = (v_k)^2$.

Donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $v_{k+1} = \left(\dfrac{1}{3^{2^k}}\right)^2 = \dfrac{1^2}{(3^{2^k})^2} = \dfrac{1}{3^{2^k \times 2}} = \dfrac{1}{3^{2^{k+1}}}$ CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{3^{2^n}}}$.

Correction 3.

1. $$\begin{aligned}(1-\sqrt{2})^6 &= 1^6 + 6\times 1^5 \times (-\sqrt{2})^1 + 15\times 1^4 \times (-\sqrt{2})^2 + 20 \times 1^3 \times (-\sqrt{2})^3 + 15\times 1^2 \times (-\sqrt{2})^4 \\ &\quad + 6\times 1 \times (-\sqrt{2})^5 + (-\sqrt{2})^6 \\ &= 1 - 6\sqrt{2} + 15\times 2 - 20 \times 2\sqrt{2} + 15 \times 4 - 6\times 4\sqrt{2} + 8 \\ &= \boxed{99 - 70\sqrt{2}}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}S_1 &= \tfrac{1}{6}\left(\sum_{k=8}^{31} k - \sum_{k=8}^{31} 5\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\left((31-8+1)\times \tfrac{31+8}{2} - 5\times(31-8+1)\right) \\ &= \tfrac{1}{6}(12\times 39 - 5\times 24) \\ &= 2\times 39 - 5\times 4 \\ &= 78 - 20 \\ &= \boxed{58}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2(n) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-3) \\ &= \tfrac{1-2^{n+1}}{1-2} + 4\times \tfrac{n(n+1)}{2} + (n-3)\times(n+1) \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2n^2 + 2n + n^2 - 3n + n - 3 \\ &= \boxed{2^{n+1} + 3n^2 - 4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_3(n) &= 3^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= 3^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \\ &= 3^n \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^{n+1}\times \frac{1}{3}} \\ &= \boxed{3^{n+1} - 2^{n+1}}\end{aligned}$$

OU $$\begin{aligned}S_3(n) &= (3-2)\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} \\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{18} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{18}(\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{18}\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{18}\ln(k) \\ &= \sum_{p=2}^{19}\ln(p) - \sum_{k=1}^{18}\ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^{18}\ln(p) + \ln(19) - \ln(1) - \sum_{k=2}^{18}\ln(k) \\ &= \boxed{\ln(19)}\end{aligned}$$

avec le changement d'indice $p = k+1$
k va de 1 à 18
donc p va de 2 à 19

4. Si $m = p$, alors $p+1 > m$ donc $\dbinom{m}{p+1} = 0$, donc la formule est vraie.

Sinon, on sait que pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout k de $[\![0, n]\!]$, $\dbinom{n+1}{k} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1}$.

On applique cette formule avec $n = m$ et $k = p+1$ ($m > p$ donc $p+1 \leqslant m$), alors $\dbinom{m+1}{p+1} =$

$\binom{m}{p+1} + \binom{m}{p}$ et donc $\boxed{\binom{m}{p} = \binom{m+1}{p+1} - \binom{m}{p+1}}$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } \sum_{m=p}^{N} \binom{m}{p} &= \sum_{m=p}^{N} \left(\binom{m+1}{p+1} - \binom{m}{p+1} \right) \\
&= \sum_{m=p}^{N} \binom{m+1}{p+1} - \sum_{m=p}^{N} \binom{m}{p+1} \quad \text{changement d'indice dans la première somme, } n = m+1 \\
&\qquad m \text{ va de } p \text{ à } N \\
&\qquad \text{donc } n \text{ va de } p+1 \text{ à } N+1 \\
&= \sum_{n=p+1}^{N+1} \binom{n}{p+1} - \sum_{m=p}^{N} \binom{m}{p+1} \\
&= \sum_{n=p+1}^{N} \binom{n}{p+1} + \binom{N+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} - \sum_{m=p+1}^{N} \binom{m}{p+1} \\
&= \binom{N+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \\
&= \binom{N+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Correction 4.

1. On utilise la formule $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.
Alors $y_p'(x) = \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x$
et $y_p''(x) = (\lambda''(x)e^x + \lambda'(x)e^x) + (\lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x) = \lambda''(x)e^x + 2\lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } \; y_p \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda''(x)e^x + 2\lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = xe^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda''(x)e^x + 2\lambda'(x)e^x = xe^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda''(x) + 2\lambda'(x) = x \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0 \\
&\iff \lambda' \text{ solution de } (F)
\end{aligned}$$

<u>On a donc bien l'équivalence recherchée.</u>
On cherche une solution particulière de (F) sous forme $z(x) = ax + b$.
z solution de $(F) \iff \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + 2z(x) = x \iff \forall x \in \mathbb{R}, a + 2ax + 2b = x$.
On cherche a et b tels que $2a = 1$ et $a + 2b = 0$.
On trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$, donc $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ est une solution de } (F)}$.
On cherche donc λ tel que $\lambda'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. On peut prendre $\lambda(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$.
Ainsi $\boxed{y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^x \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

2. $\star$ Équation homogène $\mathcal{H}$: $y'' - y = 0$
équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.
Donc $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$
$\star$ Solution particulière : trouvée en **1.**
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

Correction 5.

1. • <u>$\omega = 0$</u> **:** alors l'équation est $y'' = 0$.
Alors y' est constante : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, \pi], y'(x) = \lambda$.
Et donc $\exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, \pi], y(x) = \lambda x + \mu$.
$y(0) = 0 \iff \mu = 0$ et alors $y(x) = \lambda x$ donc $y(\pi) = 0 \iff \lambda = 0$.
Donc <u>la seule fonction solution du problème est la fonction nulle</u>.

• <u>$\omega < 0$</u> **:** l'équation caractéristique est $r^2 + \omega = 0$ donc $r_1 = \sqrt{-\omega}$ et $r_2 = -\sqrt{-\omega}$.
Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{-\omega}x} + \mu e^{-\sqrt{-\omega}x}$.
Si de plus $y(0) = 0$, alors $\lambda + \mu = 0$ donc $\lambda = -\mu$.
Alors $y(\pi) = \lambda\left(e^{\sqrt{-\omega}\pi} - e^{-\sqrt{-\omega}\pi}\right)$.

Or $\sqrt{-\omega} \neq 0$ donc $e^{\sqrt{-\omega}\pi} \neq e^{-\sqrt{-\omega}\pi}$ (car exp est injective), donc $e^{\sqrt{-\omega}\pi} - e^{-\sqrt{-\omega}\pi} \neq 0$ donc $\lambda = 0$.
Donc la seule fonction f possible est encore la fonction nulle.

2. Les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = i\sqrt{\omega}$ et $r_2 = -i\sqrt{\omega}$.
Donc les solutions réelles sont $y(x) = \lambda\cos(\sqrt{\omega}x) + \mu\sin(\sqrt{\omega}x)$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
Alors $y(0) = \lambda$ et on veut $y(0) = 0$ donc $\lambda = 0$.
Donc $y(x) = \mu\sin(\sqrt{\omega}x)$ donc $y(\pi) = \mu\sin(\sqrt{\omega}\pi)$.
Si $\sin(\sqrt{\omega}\pi) \neq 0$, alors $\mu = 0$ donc la seule solution sera la fonction nulle.
Or $\sin(\sqrt{\omega}\pi) = 0 \iff \sqrt{\omega}$ est entier.
$\omega > 0$ et la racine carrée est à valeurs positives, donc $\sqrt{\omega}$ est entier si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\omega} = n$ c'est-à-dire $\omega = n^2$.
L'équation différentielle avec conditions initiales a une solution non nulle si et seulement si $\omega = n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction 6.

1.
- injectivité : $f(0) = e^{i0} = 1$ et $f(2\pi) = e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.
  Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.
- surjectivité : soit $z \in \mathbb{U}$, alors $|z| = 1$ et en notant θ un argument de z, on a $z = e^{i\theta}$ donc $f(\theta) = z$ donc z a bien un antécédent par f.
  Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

2.
- injectivité : $g(0) = e^0 = 1$ et $g(2\pi i) = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.
  Donc 1 a (au moins) deux antécédents, donc $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$.
- surjectivité : soit $Z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, on lui cherche un antécédent.
  On note ρ le module de Z, et Z étant non nul, il a un argument que l'on peut noter θ et ainsi $Z = \rho e^{i\theta}$.
  $Z \neq 0$ donc $\rho > 0$, ainsi, $g(\ln(\rho) + i\theta) = e^{\ln(\rho)+i\theta} = e^{\ln(\rho)}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta} = Z$.
  Donc $\ln(\rho) + i\theta$ est un antécédent de Z par g.
  Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

Correction 7.

1. Emballer les 10 cadeaux revient à choisir 10 fois une couleur d'emballage, dans l'ordre des cadeaux. Une couleur peut être utilisée pour plusieurs cadeaux.
Déterminer les couleurs des paquets revient donc à former une 10-liste d'éléments de l'ensemble {rouge, vert, blanc,
Cela fait donc $\boxed{4^{10} \text{ choix possibles}}$.

2. Emballer les cadeaux sans utiliser le papier rouge se fait de 3^{10} façons différentes.
Donc $\boxed{\text{il y a } 4^{10} - 3^{10} \text{ résultats possibles avec au moins un cadeau emballé en rouge}}$.

3. **(a)** Pour choisir les couleurs, il faut piocher successivement (dans l'ordre des lettres) 4 feutres sans remise car les lettres doivent être de couleur différente.
Chaque façon de colorier correspond donc à un 4-uplet d'éléments distincts de l'ensemble des feutres.
Il y a donc $\boxed{9 \times 8 \times 7 \times 6 \text{ façons de colorier les lettres}}$.

(b) Pour faire une photo, il faut que les 4 lutins se rangent dans un ordre donné.
Chaque photo correspondra donc à une permutation des 4 lutins.
Il y a 4! permutations possibles pour un ensemble à 4 éléments, et $4! = 24$.
Donc $\boxed{\text{les lutins vont prendre 24 photos}}$.