Corrigé du DM n°14

Correction 1.

1. $\mathcal{P}(2)$: $2^2 = 3 \times 2 + 1$, or $2^2 = 4$ et $3 \times 2 + 1 = 7$, donc $\mathcal{P}(2)$ n'est pas vraie.
Donc $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ n'est pas vraie pour tous les entiers naturels } n}$.

2.
- $\boxed{\mathcal{P}(0) : 10 \times 0^2 - 3 \times 0 + 2 \leqslant 0^3}$ et $\boxed{\mathcal{P}(1) : 10 \times 1^2 - 3 \times 1 + 2 \leqslant 1^3}$.
- $10 \times 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$ et $0^3 = 0 < 2$ donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est fausse}}$.
- $10 \times 10^2 - 3 \times 10 + 2 = 1000 - 30 + 2 = 972$ et $10^3 = 1000$
  Or $972 \leqslant 1000$ donc $\boxed{\mathcal{P}(10) \text{ est vraie}}$.

3.
- $\boxed{\mathcal{P}(0) : u_0 = 4 \times 3^0 - 1}$ et $\boxed{\mathcal{P}(2) : u_2 = 4 \times 3^2 - 1}$
- $u_0 = 3$ et $4 \times 3^0 - 1 = 4 \times 1 - 1 = 3$ donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie}}$.
- $u_1 = 3u_0 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$ donc $u_2 = 3 \times 11 + 2 = 35$
  Et $4 \times 3^2 - 1 = 4 \times 9 - 1 = 35$.
  Donc $\boxed{\mathcal{P}(2) \text{ est vraie}}$.

Correction 2.

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell(\ell+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

D'après les propriétés de la somme, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k+1} \frac{1}{\ell(\ell+1)} = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell(\ell+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)}$.

Donc, en utilisant $\mathcal{P}(k)$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{k+1} \frac{1}{\ell(\ell+1)} &= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)} \\
&= 1 - \frac{(k+1)+1}{(k+1)((k+1)+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} \\
&= 1 + \frac{-(k+1)-1+1}{(k+1)((k+1)+1)} \\
&= 1 + \frac{-(k+1)}{(k+1)((k+1)+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{(k+1)+1} \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}}$.

2. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $v_n = \dfrac{1}{3^{2^n}}$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie : $v_0 = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3^{2^0}} = \dfrac{1}{3^1} = \dfrac{1}{3}$ donc $v_0 = \dfrac{1}{3^{2^0}}$ CQFD.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $v_k = \dfrac{1}{3^{2^k}}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par définition de la suite, $v_{k+1} = (v_k)^2$.

Donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $v_{k+1} = \left(\dfrac{1}{3^{2^k}}\right)^2 = \dfrac{1^2}{(3^{2^k})^2} = \dfrac{1}{3^{2^k\times 2}} = \dfrac{1}{3^{2^{k+1}}}$ CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{3^{2^n}}}$.

Correction 3.

1.

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2})^6 &= 1^6 + 6\times 1^5 \times (-\sqrt{2})^1 + 15\times 1^4 \times (-\sqrt{2})^2 + 20 \times 1^3 \times (-\sqrt{2})^3 + 15\times 1^2 \times (-\sqrt{2})^4 \\ &\quad + 6 \times 1 \times (-\sqrt{2})^5 + (-\sqrt{2})^6 \\ &= 1 - 6\sqrt{2} + 15\times 2 - 20 \times 2\sqrt{2} + 15 \times 4 - 6 \times 4\sqrt{2} + 8 \\ &= \boxed{99 - 70\sqrt{2}}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}S_1 &= \tfrac{1}{6}\left(\sum_{k=8}^{31} k - \sum_{k=8}^{31} 5\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\left((31-8+1)\times \tfrac{31+8}{2} - 5\times(31-8+1)\right) \\ &= \tfrac{1}{6}(12\times 39 - 5\times 24) \\ &= 2\times 39 - 5\times 4 \\ &= 78 - 20 \\ &= \boxed{58}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2(n) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-3) \\ &= \tfrac{1-2^{n+1}}{1-2} + 4\times\tfrac{n(n+1)}{2} + (n-3)\times(n+1) \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2n^2 + 2n + n^2 - 3n + n - 3 \\ &= \boxed{2^{n+1} + 3n^2 - 4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_3(n) &= 3^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= 3^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \\ &= 3^n \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^{n+1}\times\frac{1}{3}} \\ &= \boxed{3^{n+1} - 2^{n+1}}\end{aligned}$$

OU

$$\begin{aligned}S_3(n) &= (3-2)\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} \\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{18}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{18}(\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{18}\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{18}\ln(k) \\ &= \sum_{p=2}^{19}\ln(p) - \sum_{k=1}^{18}\ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^{18}\ln(p) + \ln(19) - \ln(1) - \sum_{k=2}^{18}\ln(k) \\ &= \boxed{\ln(19)}\end{aligned}$$

avec le changement d'indice $p = k+1$
k va de 1 à 18
donc p va de 2 à 19

Correction 4.

1. On utilise la formule $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.
Alors $y_p'(x) = \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x$
et $y_p''(x) = (\lambda''(x)e^x + \lambda'(x)e^x) + (\lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x) = \lambda''(x)e^x + 2\lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda''(x)e^x + 2\lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = xe^x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda''(x)e^x + 2\lambda'(x)e^x = xe^x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda''(x) + 2\lambda'(x) = x \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0 \\ &\iff \lambda' \text{ solution de } (F) \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence recherchée.
On cherche une solution particulière de (F) sous forme $z(x) = ax + b$.
z solution de $(F) \iff \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + 2z(x) = x \iff \forall x \in \mathbb{R}, a + 2ax + 2b = x$.
On cherche a et b tels que $2a = 1$ et $a + 2b = 0$.
On trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$, donc $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ est une solution de } (F)}$.
On cherche donc λ tel que $\lambda'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. On peut prendre $\lambda(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$.
Ainsi $\boxed{y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right) e^x \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

2. $\star$ Équation homogène $\mathcal{H} : y'' - y = 0$
équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.
Donc $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
$\star$ Solution particulière : trouvée en **1.**
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right) e^x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

Correction 7.

1. Emballer les 10 cadeaux revient à choisir 10 fois une couleur d'emballage, dans l'ordre des cadeaux.
Une couleur peut être utilisée pour plusieurs cadeaux.
Déterminer les couleurs des paquets revient donc à former une 10-liste d'éléments de l'ensemble {rouge, vert, blanc, jaune}.
Cela fait donc $\boxed{4^{10} \text{ choix possibles}}$.

2. Emballer les cadeaux sans utiliser le papier rouge se fait de 3^{10} façons différentes.
Donc $\boxed{\text{il y a } 4^{10} - 3^{10} \text{ résultats possibles avec au moins un cadeau emballé en rouge}}$.

3. **(a)** Pour choisir les couleurs, il faut piocher successivement (dans l'ordre des lettres) 4 feutres sans remise car les lettres doivent être de couleur différente.
Chaque façon de colorier correspond donc à un 4-uplet d'éléments distincts de l'ensemble des feutres.
Il y a donc $\boxed{9 \times 8 \times 7 \times 6 \text{ façons de colorier les lettres}}$.

(b) Pour faire une photo, il faut que les 4 lutins se rangent dans un ordre donné.
Chaque photo correspondra donc à une permutation des 4 lutins.
Il y a 4! permutations possibles pour un ensemble à 4 éléments, et $4! = 24$.
Donc $\boxed{\text{les lutins vont prendre 24 photos}}$.