Corrigé du DM n°13

Correction 1.

1. • équation homogène : $y' - 3y = 0$
$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto \lambda e^{3t}, \lambda \in \mathbb{C}\}$

• solution particulière de $y' - 3y = 1$:
le second membre est constant, donc $y_{p_1}(t) = \frac{1}{-3}$ convient ;

• solution particulière de $y' - 3y = \sin(2t)$:
On la recherche sous forme $y_p(t) = m_1\cos(2t) + m_2\sin(2t)$.
Alors $y_p'(t) = -2m_1\sin(2t) + 2m_2\cos(2t)$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) - 3y_p(t) = -2m_1\sin(2t) + 2m_2\cos(2t) - 3m_1\cos(3t) - 3m_2\sin(2t)$
$= (-2m_1 - 3m_2)\sin(2t) + (2m_2 - 3m_1)\cos(2t)$
Or on veut $y_p'(t) - 3y_p(t) = \sin(2t)$.
Donc on cherche m_1 et m_2 tels que $\left\{\begin{array}{ll} -2m_1 - 3m_2 = 1 & (1) \\ -3m_1 + 2m_2 = 0 & (2) \end{array}\right.$.
$2 \times (1) + 3 \times (2)$ donne $-4m_1 - 9m_1 = 2$ soit $m_1 = -\frac{2}{13}$.
Alors dans (2), $2m_2 = 3m_1$ donc $m_2 = -\frac{3}{13}$.
Donc on peut prendre $y_{p_2}(t) = -\frac{2}{13}\cos(2t) - \frac{3}{13}\sin(2t)$;

• solution générale : $\mathcal{S} = \left\{y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{3t} - \frac{1}{3} - \frac{2}{13}\cos(2t) - \frac{3}{13}\sin(2t),\ \lambda \in \mathbb{C}\right\}$.

• On cherche λ tel que $y_\lambda(0) = 1$ soit$\lambda e^{3\times 0} - \frac{1}{3} - \frac{2}{13}\cos(0) - \frac{3}{13}\sin(0) = 1$
Soit $\lambda - \frac{1}{3} - \frac{2}{13} = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{3} + \frac{2}{13} + 1 = \frac{13+6+39}{39} = \frac{58}{39}$.
$\boxed{\text{La solution au problème de Cauchy est } y : t \mapsto \frac{58}{39}e^{3t} - \frac{1}{3} - \frac{2}{13}\cos(2t) - \frac{3}{13}\sin(2t).}$

2. • équation homogène : $y' + \frac{1}{2}y = 0$
$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}t}, \lambda \in \mathbb{C}\right\}$

• solution particulière : on la recherche sous forme $y_p(t) = mte^{-\frac{1}{2}t}$.
Alors $y_p'(t) = me^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}mte^{-\frac{1}{2}t}$.
Donc y_p est solution de $y' + \frac{1}{2}y = e^{-\frac{t}{2}} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ me^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}mte^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}mte^{-\frac{1}{2}t} = e^{-\frac{t}{2}}$
$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ me^{-\frac{1}{2}t} = e^{-\frac{t}{2}}$
Donc en prenant $m = 1$, la fonction $t \mapsto te^{-\frac{1}{2}}$ est une solution de l'équation

• solution générale : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}t} + te^{-\frac{1}{2}t},\ \lambda \in \mathbb{C}\right\}}$.

3. **(a)** $2y'' - 2y' + \frac{5}{2}y = 10 \iff y'' - y' + \frac{5}{4}y = 5$

• équation homogène : $y'' - y' + \frac{5}{4}y = 0$.
équation caractéristique : $r^2 - r + \frac{5}{4} = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{5}{4} \times 1 = -4 = (2i)^2$, donc $r_1 = \frac{1-2i}{2} = \frac{1}{2} - i$ et $r_2 = \frac{1}{2} + i$.
Donc $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto e^{\frac{1}{2}t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• solution particulière : $y_p(t) = \dfrac{5}{\frac{5}{4}} = 4$

• solution générale : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{t \mapsto e^{\frac{1}{2}t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)) + 4,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

(b) • solution homogène : équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$
$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$ donc $r_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $r_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$.
Donc $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

• solution particulière : on la recherche sous forme $y_p(x) = me^x$.
Alors $y_p'(x) = me^x$ et $y_p''(x) = me^x$.
Donc y_p solution $\iff \forall x \in \mathbb{R}, me^x + 3me^x + 2me^x = -e^x \iff \forall x \in \mathbb{R}, 6me^x = -e^x$.
On peut prendre $m = -\frac{1}{6}$, donc $y_p(x) = -\frac{1}{6}e^x$.

- solution générale : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^{-x} - \frac{1}{6}e^{x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

(c) • solution homogène : équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$
On reconnaît une identité remarquable avec -1 racine double.
Donc $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

- solution particulière de $y'' + 2y' + y = 8e^{3x}$: on la recherche sous forme $y_p(x) = me^{3x}$.
Alors $y_p'(x) = 3me^{3x}$ et $y_p''(x) = 9me^{3x}$.
Donc y_p solution $\iff \forall x \in \mathbb{R}, 9me^{3x} + 6me^{3x} + me^{3x} = 8e^{3x} \iff \forall x \in \mathbb{R}, 16me^{x} = 8e^{3x}$.
On peut prendre $m = \frac{1}{2}$, donc $y_{p_1}(x) = \frac{1}{2}e^{3x}$.

- solution particulière de $y'' + 2y' + y = \cos(2x)$:
on la recherche sous forme $y_p(x) = m_1\cos(2x) + m_2\sin(2x)$.
Alors $y_p'(x) = -2m_1\sin(2x) + 2m_2\cos(2x)$
Et $y_p''(x) = -4m_1\cos(2x) - 4m_2\sin(2x)$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} y_p''(x) + 2y_p'(x) + y_p(x) &= (-4m_1 + 4m_2 + m_1)\cos(2x) + (-4m_2 - 4m_1 + m_2)\sin(2x) \\ &= (-3m_1 + 4m_2)\cos(2x) + (-4m_1 - 3m_2)\sin(2x) \end{aligned}$$
On résout $\begin{cases} -3m_1 + 4m_2 = 1 \\ -4m_1 - 3m_2 = 0 \end{cases}$
D'après L_2, $m_1 = -\frac{3}{4}m_2$, donc dans L_1, $(\frac{9}{4} + 4)m_2 = 1$ soit $m_2 = \frac{4}{25}$ et donc $m_1 = -\frac{3}{25}$.
Donc $y_{p_2}(x) = -\frac{3}{25}\cos(2x) + \frac{4}{25}\sin(2x)$.

- solution générale : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{3}{25}\cos(2x) + \frac{4}{25}\sin(2x),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Correction 2.

1. N est solution de l'équation différentielle $y' + \lambda y = 0$.
Les solutions sont les fonctions N telles que $N(t) = Ce^{-\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Alors $N(0) = Ce^0 = C$, donc $C = N_0$.
Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$.

2. $A(t) = -N'(t) = -N_0 \times (-\lambda)e^{-\lambda t} = \boxed{N_0\lambda e^{-\lambda t}}$.

3. **(a)** La demi-vie étant 30,15 ans, $A(30,15) = \frac{1}{2}A(0)$.
Or $\frac{1}{2}A(0) = \frac{1}{2}N_0\lambda e^0 = \frac{1}{2}N_0\lambda$.
Donc on résout : $N_0\lambda e^{-\lambda 30,15} = \frac{1}{2}N_0\lambda \iff e^{-\lambda 30,15} = \frac{1}{2}$ car N_0 et λ sont non nuls
$$\iff -\lambda \times 30,15 = \ln(\tfrac{1}{2})$$
$$\iff -\lambda = \frac{-\ln(2)}{30,15}$$
Donc $\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{30,15}}$.

(b) Le 22 mars 2011 était 11 jours après l'accident, donc $A\left(\frac{11}{365}\right) = 6 \times 10^{15}$.
Donc $N_0\lambda e^{-\lambda\frac{11}{365}} = 6 \times 10^{15}$.
$$N_0\lambda = 6 \times 10^{15} \times e^{\frac{11\ln(2)}{365\times 30,15}}$$
Le 11 mars 2023 correspond à $t = 12$, $A(12) = 6 \times 10^{15} \times e^{\frac{11\ln(2)}{365\times 30,15}} \times e^{-\frac{\ln(2)\times 12}{30,15}} \approx 4,6 \times 10^{15}$.
$\boxed{\text{Le 11 mars 2023 dans la centrale de Fukushima, l'activité était d'environ } 4,6 \times 10^{15}\text{Bq.}}$

4. On cherche t tel que $A(t) \leqslant 37 \times 10^3$. Résolvons cette inéquation :
$$\begin{aligned} N_0\lambda e^{-\lambda t} &\leqslant 37 \times 10^3 \\ e^{-\lambda t} &\leqslant \frac{37\times 10^3}{N_0\lambda} \\ -\lambda t &\leqslant \ln\left(\frac{37\times 10^3}{N_0\lambda}\right) \quad \text{(la fonction ln est croissante)} \\ t &\geqslant -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{37\times 10^3}{N_0\lambda}\right) \quad \text{car } \lambda > 0 \end{aligned}$$
$-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{37\times 10^3}{N_0\lambda}\right) \approx 1122,7$.
Or $2011+1122,7 = 3133,7$, il faudra donc attendre l'année 3134 pour que la centrale puisse être considérée comme non contaminée ...