

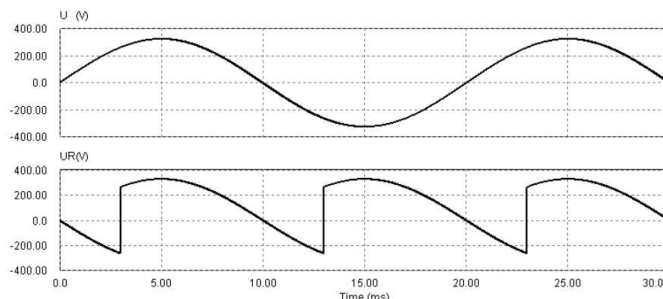
INTÉGRALES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Exercice 1.

1. **Valeurs moyennes :** la *valeur moyenne* de la fonction f sur le segment $[a, b]$ est $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

(a) On note $v(t) = V_{max} \sin(\omega t)$ une tension alternative sinusoïdale, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Calculer la valeur moyenne de v sur $[0, T]$.

(b) La tension de sortie d'un redresseur est $\frac{T}{2}$ périodique, et sur l'intervalle $[3, 3 + \frac{T}{2}]$, elle vaut $UR(t) = U_{max} \sin(\omega t)$.
Calculer sa valeur moyenne sur cet intervalle.



2. **Intégrales classiques :**

(a) Rappeler la formule de trigonométrie liant $\cos^2(a)$ à $\cos(2a)$.
En utilisant cette formule, calculer la valeur moyenne de $f(t) = \cos^2(\omega t)$ sur $[0, T]$ avec toujours $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(b) Procéder de même pour déterminer la valeur efficace $V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$ de la tension $v(t) = V_{max} \sin(\omega t)$.

(c) Calculer la valeur moyenne de $g(t) = \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ sur $[0, T]$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

3. L'énergie $\mathcal{E}$ fournie par un générateur pour charger un condensateur C sous la tension E avec une résistance R est donnée par $\mathcal{E} = \int_0^{3\tau} u(t)i(t) dt$ avec $u(t) = E$ et $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Calculer cette intégrale en fonction de E , R et τ .

Sachant que $\tau = RC$, et en considérant que e^{-3} est négligeable devant 1, donner une expression approchée simple de $\mathcal{E}$.

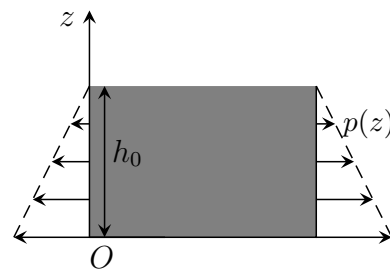
4. **Répartition des forces :**

La pression exercée sur les parois verticales d'un bac d'eau dépend de la position verticale z .

Si l'origine des positions verticales est le fond du bac, la pression est donnée par $p(z) = \rho g(h_0 - z)$ où ρ est la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur, et h_0 la hauteur du bac.

La composante latérale de la résultante du torseur de l'action de l'eau sur un côté du bac est donnée par $F = \int_0^{h_0} p(z)\ell dz$ où ℓ est la longueur d'un côté du bac.

Exprimer F en fonction de ρ , g , ℓ et h_0 .



Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles ci-dessous, en tenant compte des conditions initiales s'il y en a.

1. $J \frac{d\omega}{dt} = -Cr - \mu\omega$ et à $t = 0$, $\omega(0) = \omega_{max}$.

2. $\frac{ds}{dt} + \frac{Rs}{3L} = 0$ et $s(0) = \frac{E}{3}$.

3. $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = \frac{E}{RC}$ et $u_c(t=0) = E$.

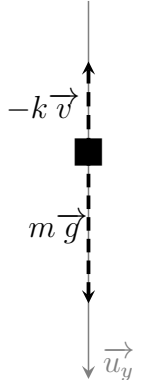
4. $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$ et $u_c(0) = E$ et $u_c'(0) = 0$, on prendra $Q = \frac{1}{2}$.
5. $\ddot{u}_c + 2\xi\omega_0\dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$, on précise que $\xi < 1$.
6. $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{RI_0}{L}$ avec $i(0) = 0$.

Exercice 3.

Un corps est lâché en chute libre dans l'air, sans vitesse initiale. On note v la projection du vecteur vitesse $\vec{v}$ sur $\vec{u}_y$. Les forces s'exerçant sur le corps sont :

- ★ le poids : masse $\times \vec{g}$
- ★ le frottement, proportionnel à la vitesse : $-k\vec{v}$ ($k > 0$)

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, projeté sur $\vec{u}_y$, écrire le problème de Cauchy vérifié par la fonction v , et le résoudre.
2. Déterminer la limite de v lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Déterminer la position y du corps en fonction du temps, et de sa position initiale y_0 .



Exercice 4.

Dans un circuit RLC, la tension u du condensateur est une fonction du temps qui vérifie l'équation différentielle $LCu'' + RCu' + u = E$ avec $R = 10\Omega$, $L = 0,1H$, $C = 5 \times 10^{-6}F$ et $E = 12V$.

1. Utiliser les données numériques pour mettre l'équation sous la forme usuelle.
2. Trouver les solutions réelles de cette équation.
3. Les conditions initiales sont $u(0) = u'(0) = 0$.
Déterminer la fonction u donnant l'évolution de la tension u au cours du temps.
4. Tracer la courbe sur la calculatrice et interpréter (on calculera précisément $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$).

Exercice 5.

On attache un mobile M à l'une des extrémités d'un ressort, l'autre extrémité étant liée à un excitateur sinusoïdal. On compresse le ressort, puis on lâche.

Dans un repère $(O, \vec{i})$, l'abscisse x du mobile M varie en fonction du temps t et vérifie l'équation suivante :

$$(\mathcal{E}) : x'' + 9x = 8\sin(t)$$

À $t = 0$, le mobile est à une distance ℓ de l'origine du repère, et on le lâche à vitesse nulle.

Exprimer x en fonction de t .