Factorisation et développements

Rappel des identités remarquables.

Factoriser une somme, c'est écrire cette somme sous la forme d'un produit.
Développer un produit, c'est écrire ce produit sous la forme d'une somme.

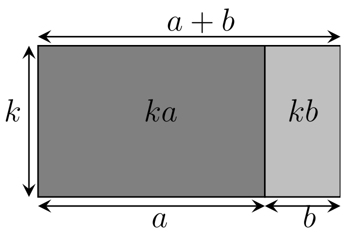
Voici quatre égalités qui sont vraies quels que soient les réels a, b et k :

on développe

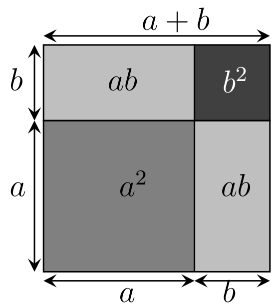
$$\boxed{\begin{array}{rcl} k(a+b) & = & ka+kb \\ (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)(a-b) & = & a^2-b^2 \end{array}}$$

on factorise

On peut illustrer géométriquement les deux premières égalités :



L'aire totale se calcule de deux façons :
⋆ longueur×largeur : $k(a+b)$
⋆ la somme des aires des deux rectangles : $ka+kb$



L'aire du grand carré se calcule de deux façons :
⋆ longueur^2 : $(a+b)^2$
⋆ somme des aires : $a^2+2\times ab+b^2$

Exemples :

1. $A(x)=-4x^2+4x$: dans chacun des termes de la somme, le facteur $4x$ est commun. On peut donc factoriser $A(x)$ par $4x$.
Alors $A(x) = 4x(-x)+4x\times 1$
$= \underline{4x(-x+1)}$

2. $B(x)=6x-3+(2x-1)^3$: on reconnaît $2x-1$ comme facteur commun car $6x-3=3(2x-1)$.
Donc
$$\begin{aligned} B(x) &= 3(2x-1)+(2x-1)\times(2x-1)^2 \\ &= (2x-1)\Big(3+(2x-1)^2\Big) \\ &= (2x-1)\Big(3+4x^2-4x+1\Big) \\ &= (2x-1)\Big(4x^2-4x+4\Big) \\ &= \underline{4(2x-1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

3. $C(x)=3x-7+(3x-7)^2+12x(3x-7)$: le facteur commun est $(3x-7)$ car $3x-7=(3x-7)\times 1$.
Donc
$$\begin{aligned} C(x) &= (3x-7)\Big(1+(3x-7)+12x\Big) . \\ &= \underline{(3x-7)\Big(15x-6\Big)} \end{aligned}$$