

LOGIQUE 1.

Vocabulaire, équivalences et implications.

Exercice 1.

Associer chaque terme à sa définition, et trouver l'illustration qui convient.

proposition •	<ul style="list-style-type: none"> • Énoncé supposé vrai a priori, et que l'on ne cherche pas à démontrer. • • Proposition démontrée par un raisonnement logique construit à partir d'axiomes. • 	<ul style="list-style-type: none"> • La fonction exponentielle est à valeurs positives.
propriété •	<ul style="list-style-type: none"> • Qualité propre à une chose. On est souvent amené à montrer que certains objets mathématiques vérifient certaines de ces qualités. • 	<ul style="list-style-type: none"> • Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
théorème •	<ul style="list-style-type: none"> • Ce que l'on tient pour acquis dans le cadre d'un raisonnement afin d'obtenir le résultat désiré. • 	<ul style="list-style-type: none"> • Tout entier naturel n a un unique successeur.
hypothèse •	<ul style="list-style-type: none"> • Énoncé mathématique qui est soit vrai soit faux. • 	<ul style="list-style-type: none"> • Soit $x \in [0; 1]$.
axiome •	<ul style="list-style-type: none"> • Lettre à laquelle on peut attribuer différentes valeurs. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
inconnue •	<ul style="list-style-type: none"> • Grandeur, valeur que l'on doit déterminer. 	<ul style="list-style-type: none"> • $\ll x \gg$ dans $f(x) = -\sqrt{x^2 + 3}$
variable •	<ul style="list-style-type: none"> • Phrase mathématique dont le verbe est le signe $=$. Le premier membre et le deuxième membre sont deux écritures différentes d'un même nombre. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $\ll x \gg$ dans $3x + 4 = 11$
formule •	<ul style="list-style-type: none"> • Combinaison d'opérations permettant de définir un résultat à partir de données initiales • 	<ul style="list-style-type: none"> • $3x + 4 = 7$
égalité •	<ul style="list-style-type: none"> • Égalité contenant une ou plusieurs lettres, appelées inconnues, dont on cherche à déterminer la ou les valeurs possibles, nommée(s) solution(s). • 	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
équation •	<ul style="list-style-type: none"> • Relation entre deux propositions qui ont la même valeur de vérité. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $7x^2 - 11x + 3$
expression •	<ul style="list-style-type: none"> • Nom donné à certaines égalités remarquables. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$
équivalence •	<ul style="list-style-type: none"> • Écriture formée de nombres, variables, signes, opérateurs, ... à l'exclusion du signe $=$. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $x \mapsto 11x + 49$
fonction •	<ul style="list-style-type: none"> • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2.

Proposition ? Expression ? (In)équation ?

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. Pour tout nombre réel x , $x^2 - 3x + 1 \geq 0$. | 6. $f(x) = 3x$ |
| | |
| 2. $x^2 - 3x + 1$ | 7. $f(x)$ |
| | |
| 3. $f(4) = 2$ | 8. $(x^3 - 4x + 11) \times 2x - 4$ |
| | |
| 4. Il existe un nombre réel x tel que $f(x) = 3x$. | 9. $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ |
| | |
| 5. Pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = 2x$. | 10. f est à valeurs positives. |
| | |

Exercice 3.

Vrai ou Faux ?

- $a^2 = b^2 \iff a = b$.
- Pour que $a = b$, il suffit que $a^2 = b^2$.
- Pour que $a = b$, il faut que $a^2 = b^2$.
- $e^x = e^y \iff x = y$.
- $x \geq 3 \iff x^2 \geq 9$.
- $3 < 0 \iff \pi = 0$.
- $41 > 0$ donc $41 > -1$.
- $3 \geq 5x \iff \frac{3}{x} \geq 5$.
- $x^2 \leq 4 \implies x \leq 4$.

Exercice 4.

On rappelle que \iff se lit « » ou « ».
 Et \implies se lit « ».

A et B sont deux propositions.

Compléter par \implies , \impliedby ou \iff :

- « A est une condition nécessaire à B » signifie « A B ».
- « A est une condition suffisante pour que B soit vraie » signifie « A B ».
- « Pour que A soit vraie, il faut que B soit vraie » signifie « A B ».
- « Il suffit que A soit vraie pour que B soit vraie » signifie « A B ».
- « Pour que A soit vraie, il faut que B soit vraie et cela suffit » signifie « A B ».
- « Une condition nécessaire à A est que B soit vraie » signifie « A B ».
- « Si A est vraie alors B est vraie » signifie « A B ».

Exercice 5. Raisonnement déductif.

Compléter lorsque c'est possible :

1. Socrate est un homme.
Or tous les hommes sont mortels.
Donc ...
2. On sait que $EFGH$ est un losange.
Or
Donc (EG) est perpendiculaire à (FH) .
3. M. Dupont est député.
Or si une personne est député, alors elle a plus de 23 ans,
Donc
4. M. Durand a 25 ans.
Or si une personne est député, alors elle a plus de 23 ans,
Donc
5. $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.
Or, \implies
Donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
6. $[\vec{u}, \vec{v}] \neq 0$.
Or, \implies
Donc \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.
7. Pour que \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} soient coplanaires, il faut que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ soit égal à 0.
Or $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.
Donc
8. $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$.
Or, d'après le théorème des croissances comparées, si n est un entier positif, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
Ici, $n = \dots$, ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$
9. Bruxelles est la capitale de la Belgique, qui est un pays d'Europe.
Or les capitales d'Europe ont toutes plus de 200 000 habitants.
Donc
10. Le nombre x est un multiple de 6.
Or, y est un multiple de 6 \implies
Donc le nombre x est pair.
11. Le nombre u est impair
Or, si un nombre est multiple de 6, alors c'est un nombre pair.
Donc