Logique.

Exercice 1.

Associer chaque terme à sa définition, et trouver l'illustration qui convient.

proposition •	• Énoncé supposé vrai a priori, et que l'on ne cherche pas à démontrer. •	• La fonction exponentielle est à valeurs positives.
propriété •	• Proposition démontrée par un raisonnement logique construit à partir d'axiomes. •	• Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
théorème •	• Qualité propre à une chose. On est souvent amené à montrer que certains objets mathématiques vérifient certaines de ces qualités. •	• Tout entier naturel n a un unique successeur.
hypothèse •	• Ce que l'on tient pour acquis dans le cadre d'un raisonnement afin d'obtenir le résultat désiré. •	• Soit $x \in [0;1]$.
axiome •	• Énoncé mathématique qui est soit vrai soit faux. •	• Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

inconnue •	• Lettre à laquelle on peut attribuer différentes valeurs. •	• « x » dans $f(x) = -\sqrt{x^2+3}$
variable •	• Grandeur, valeur que l'on doit déterminer. •	• « x » dans $3x + 4 = 11$
formule •	• Phrase mathématique dont le verbe est le signe $=$. Le premier membre et le deuxième membre sont deux écritures différentes d'un même nombre. •	• $3x + 4 = 7$
égalité •	• Combinaison d'opérations permettant de définir un résultat à partir de données initiales •	• $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
équation •	• Égalité contenant une ou plusieurs lettres, appelées inconnues, dont on cherche à déterminer la ou les valeurs possibles, nommée(s) solution(s). •	• $7x^2 - 11x + 3$
expression •	• Relation entre deux propositions qui ont la même valeur de vérité. •	• $\lvert x\rvert \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$
équivalence •	• Nom donné à certaines égalités remarquables. •	• $x \mapsto 11x + 49$
fonction •	• Écriture formée de nombres, variables, signes, opérateurs, … à l'exclusion du signe $=$. •	• $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2.

Proposition ? Expression ? (In)équation ?
On considère la fonction f donnée.

1. Pour tout nombre réel x, $x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$.

.....

2. $x^2 - 3x + 1$

.....

3. $f(4) = 2$

.....

4. Il existe un nombre réel x tel que $f(x) = 3x$.

.....

5. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 2x$.

.....

6. $f(x) = 3x$

.....

7. $f(x)$

.....

8. $(x^3 - 4x + 11) \times 2x - 4$

.....

9. $x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$

.....

10. f est à valeurs positives.

.....

Exercice 3.

On rappelle que, si A et B sont deux propositions :

- $A \Longleftrightarrow B$ *se lit «* .....
- $A \Longrightarrow B$ *se lit «* .....

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b$.

2. Pour que $a = b$, il suffit que $a^2 = b^2$.

3. Pour que $a = b$, il faut que $a^2 = b^2$.

4. Pour que les signaux soient en phase, il faut que $\varphi = 0$.

5. $x \geqslant 3 \Longleftrightarrow x^2 \geqslant 9$.

6. $3 < 0 \Longleftrightarrow \pi = 0$.

7. $3 < 0$.

8. $\pi < 0$ ou $-3 < 2$.

9. $\pi < 0$ et $-3 < 2$.

10. $\pi < 0 \Longrightarrow -3 < 2$.

11. $\pi < 0 \Longleftrightarrow -3 < 2$.

12. $3 \geqslant 5x \Longleftrightarrow \frac{3}{x} \geqslant 5$.

13. $x^2 \leqslant 4 \Longrightarrow x \leqslant 4$.

14. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leqslant n$.

15. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant n$.

Exercice 4.

A et B sont deux propositions.
Compléter par $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$:

1. « A est une condition nécessaire à B » signifie « A ..... B ».

2. « A est une condition suffisante pour que B soit vraie » signifie « A ..... B ».

3. « Pour que A soit vraie, il faut que B soit vraie » signifie « A ..... B ».

4. « Il suffit que A soit vraie pour que B soit vraie » signifie « A ..... B ».

5. « Pour que A soit vraie, il faut que B soit vraie et cela suffit » signifie « A ..... B ».

6. « Une condition nécessaire à A est que B soit vraie » signifie « A ..... B ».

7. « Si A est vraie alors B est vraie » signifie « A ..... B ».

Exercice 5. Raisonnement déductif.

Compléter lorsque c'est possible :

1. Socrate est un homme.
Or tous les hommes sont mortels.

Donc ...

2. On sait que $EFGH$ est un losange.

Or .....
Donc (EG) est perpendiculaire à (FH).

3. M. Dupont est député.
Or si une personne est député, alors elle a plus de 23 ans,

Donc .....

4. M. Dunand a 25 ans.
Or si une personne est député, alors elle a plus de 23 ans,

Donc .....

5. $\det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{a}) = 0$.

Or, ... $\Longrightarrow$ .....
Donc $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{a}$ sont colinéaires.

6. $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \neq 0$.

Or, ... $\Longrightarrow$ .....
Donc $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas colinéaires.

7. Pour que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient coplanaires, il faut que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit égal à 0.
Or $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

Donc .....

8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^7}$.

Or, d'après le théorème des croissances comparées, si n est un entier positif, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.
Ici, $n = \ldots$, ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$.

9. Pinpin est un chien.
Or les félins sont tous des carnivores.

Donc .....

10. Le nombre x est un multiple de 6.

Or : y est un multiple de 6 $\Longrightarrow$ .....
Donc le nombre x est pair.

11. Le nombre u est impair
Or, si un nombre est multiple de 6, alors c'est un nombre pair.

Donc .....

Exercice 6.

On appelle E l'ensemble des élèves de la classe de TSI2.1, et n est l'application de E dans $[\![0;20]\!]$ qui à un élève associe sa note au prochain DS de maths.

1. Donner l'écriture symbolique des phrases suivantes :

- **(a)** Au moins un élève a 10 ou plus que 10.
- **(b)** Au moins un élève a 10 ou moins de 10.
- **(c)** Tous les élèves ont 10 ou plus.
- **(d)** Aucun élève n'a plus que 10.
- **(e)** Un seul élève a eu 17.

2. Donner la négation de chacune des phrases précédentes, en français, et en écriture symbolique.

3. Parmi toutes les propositions précédentes, en trouver deux qui ont un lien d'implication.