

LOGIQUE.

Exercice 1.

Associer chaque terme à sa définition, et trouver l'illustration qui convient.

proposition •	<ul style="list-style-type: none"> • Énoncé supposé vrai a priori, et que l'on ne cherche pas à démontrer. • 	<ul style="list-style-type: none"> • La fonction exponentielle est à valeurs positives.
propriété •	<ul style="list-style-type: none"> • Proposition démontrée par un raisonnement logique construit à partir d'axiomes. • 	<ul style="list-style-type: none"> • Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
théorème •	<ul style="list-style-type: none"> • Qualité propre à une chose. On est souvent amené à montrer que certains objets mathématiques vérifient certaines de ces qualités. • 	<ul style="list-style-type: none"> • Tout entier naturel n a un unique successeur.
hypothèse •	<ul style="list-style-type: none"> • Ce que l'on tient pour acquis dans le cadre d'un raisonnement afin d'obtenir le résultat désiré. • 	<ul style="list-style-type: none"> • Soit $x \in [0; 1]$.
axiome •	<ul style="list-style-type: none"> • Énoncé mathématique qui est soit vrai soit faux. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
inconnue •	<ul style="list-style-type: none"> • Lettre à laquelle on peut attribuer différentes valeurs. • • Grandeur, valeur que l'on doit déterminer. • 	<ul style="list-style-type: none"> • « x » dans $f(x) = -\sqrt{x^2 + 3}$
variable •	<ul style="list-style-type: none"> • Phrase mathématique dont le verbe est le signe $=$. Le premier membre et le deuxième membre sont deux écritures différentes d'un même nombre. • 	<ul style="list-style-type: none"> • « x » dans $3x + 4 = 11$
formule •	<ul style="list-style-type: none"> • Combinaison d'opérations permettant de définir un résultat à partir de données initiales. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $3x + 4 = 7$
égalité •	<ul style="list-style-type: none"> • Égalité contenant une ou plusieurs lettres, appelées inconnues, dont on cherche à déterminer la ou les valeurs possibles, nommée(s) solution(s). • 	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
équation •	<ul style="list-style-type: none"> • Relation entre deux propositions qui ont la même valeur de vérité. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $7x^2 - 11x + 3$
expression •	<ul style="list-style-type: none"> • Nom donné à certaines égalités remarquables. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $x \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2$
équivalence •	<ul style="list-style-type: none"> • Écriture formée de nombres, variables, signes, opérateurs, ... à l'exclusion du signe $=$. • 	<ul style="list-style-type: none"> • $x \mapsto 11x + 49$
fonction •	<ul style="list-style-type: none"> • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2.

Proposition ? Expression ? (In)équation ?

On considère la fonction f donnée.

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. Pour tout nombre réel x , $x^2 - 3x + 1 \geq 0$. | 6. $f(x) = 3x$ |
| | |
| 2. $x^2 - 3x + 1$ | 7. $f(x)$ |
| | |
| 3. $f(4) = 2$ | 8. $(x^3 - 4x + 11) \times 2x - 4$ |
| | |
| 4. Il existe un nombre réel x tel que $f(x) = 3x$. | 9. $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ |
| | |
| 5. Pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = 2x$. | 10. f est à valeurs positives. |
| | |

Exercice 3.

On rappelle que, si A et B sont deux propositions :

- $A \iff B$ se lit «
- $A \implies B$ se lit «

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- | | |
|--|--|
| 1. $a^2 = b^2 \iff a = b$. | 8. $\pi < 0$ ou $-3 < 2$. |
| 2. Pour que $a = b$, il suffit que $a^2 = b^2$. | 9. $\pi < 0$ et $-3 < 2$. |
| 3. Pour que $a = b$, il faut que $a^2 = b^2$. | 10. $\pi < 0 \implies -3 < 2$. |
| 4. Pour que les signaux soient en phase, il faut que $\varphi = 0$. | 11. $\pi < 0 \iff -3 < 2$. |
| 5. $x \geq 3 \iff x^2 \geq 9$. | 12. $3 \geq 5x \iff \frac{3}{x} \geq 5$. |
| 6. $3 < 0 \iff \pi = 0$. | 13. $x^2 \leq 4 \implies x \leq 4$. |
| 7. $3 < 0$. | 14. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leq n$. |
| | 15. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq n$. |

Exercice 4.

A et B sont deux propositions.

Compléter par \implies , \iff ou \iff :

1. « A est une condition nécessaire à B » signifie « A B ».
2. « A est une condition suffisante pour que B soit vraie » signifie « A B ».
3. « Pour que A soit vraie, il faut que B soit vraie » signifie « A B ».
4. « Il suffit que A soit vraie pour que B soit vraie » signifie « A B ».
5. « Pour que A soit vraie, il faut que B soit vraie et cela suffit » signifie « A B ».
6. « Une condition nécessaire à A est que B soit vraie » signifie « A B ».
7. « Si A est vraie alors B est vraie » signifie « A B ».

Exercice 5. Raisonnement déductif.

Compléter lorsque c'est possible :

1. Socrate est un homme.
Or tous les hommes sont mortels.
Donc ...
2. On sait que $EFGH$ est un losange.
Or
Donc (EG) est perpendiculaire à (FH) .
3. M. Dupont est député.
Or si une personne est député, alors elle a plus de 23 ans,
Donc
4. M. Dunand a 25 ans.
Or si une personne est député, alors elle a plus de 23 ans,
Donc
5. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
Or, \implies
Donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
6. $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.
Or, \implies
Donc \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.
7. Pour que \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} soient coplanaires, il faut que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit égal à 0.
Or $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.
Donc
8. $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$.
Or, d'après le théorème des croissances comparées, si n est un entier positif, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
Ici, $n = \dots$, ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$
9. Bruxelles est la capitale de la Belgique, qui est un pays d'Europe.
Or les capitales d'Europe ont toutes plus de 200 000 habitants.
Donc
10. Le nombre x est un multiple de 6.
Or, y est un multiple de 6 \implies
Donc le nombre x est pair.
11. Le nombre u est impair
Or, si un nombre est multiple de 6, alors c'est un nombre pair.
Donc

Exercice 6.

On appelle E l'ensemble des élèves de la classe de TSI2.1, et n est l'application de E dans $\llbracket 0; 20 \rrbracket$ qui à un élève associe sa note au prochain DS de maths.

1. Donner l'écriture symbolique des phrases suivantes :

- (a) Au moins un élève a 10 ou plus que 10. (d) Aucun élève n'a plus que 10.
(b) Au moins un élève a 10 ou moins de 10. (e) Un seul élève a eu 17.
(c) Tous les élèves ont 10 ou plus.

2. Donner la négation de chacune des phrases précédentes, en français, et en écriture symbolique.

3. Parmi toutes les propositions précédentes, en trouver deux qui ont un lien d'implication.