Calculs.

$\Longleftrightarrow$ est un symbole logique qui traduit une relation d'équivalence, et se lit « si et seulement si », ou « est équivalent à ». On ne l'utilisera pour l'instant que dans les équations.

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes.

Méthode : *« les x d'un côté, les nombres de l'autre » (développer avant si besoin)*

Exemples de présentations possibles :

$$\begin{aligned} 3x-12=0 &\Longleftrightarrow 3x=12 \\ &\Longleftrightarrow x=\tfrac{12}{3} \\ &\Longleftrightarrow \underline{x=4} \end{aligned} \qquad \text{OU} \qquad \begin{aligned} 3x-12&=0 \\ 3x&=12 \\ x&=\tfrac{12}{3} \\ \underline{x}&\underline{=4} \end{aligned}$$

(a) $3x-4=11+2x$

(b) $\frac{7}{2}-\frac{1}{5}x=0$

(c) $\frac{1}{2}-x=\frac{x}{4}+\frac{2}{3}$

(d) $5(3x-2)-(4x-1)=2x+7$

(e) $(2x-1)^2-(4x+3)(x-2)=0$

(f) $\sqrt{3}x+4=1$

Exercice 2.

Dans chaque cas, calculer :
$\star$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$,
$\star$ les coordonnées du milieu I de $[AB]$,
$\star$ la norme de $\overrightarrow{AB}$
$\star$ les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$.

1. $A(1,4)$ et $B(-2,0)$ **2.** $A(-1,3)$ et $B(1,1)$ **3.** $A(\frac{2}{3},2)$ et $B(-1,0)$ **4.** $A(0,1)$ et $B(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants.

Indications : *on peut procéder par substitution : on utilise l'une des deux équations pour exprimer une inconnue en fonction de l'autre, et on remplace dans l'autre équation. Penser à numéroter les équations pour clarifier la rédaction.*

Exemple : $\begin{cases} 2x-y=3 & (1) \\ -3x+2y=1 & (2) \end{cases}$

D'après (1), $y=2x-3$.

On remplace dans (2) on obtient

$$\begin{aligned} -3x+2(2x-3)&=1 \\ -3x+4x-6&=1 \\ x&=7 \end{aligned}$$

Donc $y=2\times 7-3=11$.

Finalement $\boxed{x=7 \text{ et } y=11}$.

(a) $\begin{cases} x-4y=1 \\ 2y=3 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x+4y=0 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} x+y=6 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ **★ 4.** $\begin{cases} -2x+5y=0 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

Exercice 4.

Donner la forme algébrique des nombres suivants.

Indications : *on rappelle que $i^2 = -1$ et que la forme algébrique d'un nombre complexe est $a + ib$ avec a et b des nombres réels.*

$z_1 = 3 + 2i - (4 + i)$

$z_2 = (3 - i)(2 + 2i)$

$z_3 = (\frac{1}{2} - 3i)^2$

$z_4 = 2i - 3(4i - 5) + 12(1 + i)^2$

Exercice 5.

Résoudre les équations suivantes en se ramenant au premier degré (en factorisant si nécessaire).

Indications : *On rappelle le théorème du produit nul : si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.*

Exemple :
$$\begin{aligned}(3x+4)(x-2)=0 &\iff 3x+4=0 \text{ ou } x-2=0\\ &\iff 3x=-4 \text{ ou } x=2\\ &\iff \underline{x=-\tfrac{4}{3} \text{ ou } x=2}\end{aligned}$$

(a) $(-5x - 2)(1 - 5x) = 0$

(b) $54(6 - 5x)x(10x - 9) = 0$

(c) $(x + 3)(2x - 5) + 4(x + 3) = 0$

(d) $(2x + 1)(-3x + 4) + 2x + 1 = 0$

(e) $(3x + 4)^2 - 2(3x + 4)(5x - 1) = 0$

(f) $(3x - 5)(x + 2) = (3x - 5)^2$

Réponses

Correction 1.

(a) $x = 15$ (b) $x = \frac{35}{2}$ (c) $x = -\frac{2}{15}$ (d) $x = \frac{16}{9}$ (e) $x = -7$ (f) $x = -\sqrt{3}$.

Correction 2.

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
$I(-\frac{1}{2}, 2)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = 5$
$C(7, 12)$

2. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
$I(0, 2)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{2}$
$C(-5, 7)$

3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$
$I(-\frac{1}{6}, 1)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\sqrt{61}}{3}$
$C(4, 6)$

4. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$
$I(\frac{1}{4}, \frac{5}{8})$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\sqrt{13}}{4}$
$C(-1, \frac{7}{4})$

Correction 3.

(a) $x = 7, y = \frac{3}{2}$ (b) $x = \frac{8}{5}, y = -\frac{2}{5}$ (c) $x = -12, y = 18$ (d) $x = \frac{20}{19}, y = \frac{8}{19}$

Correction 4.

$z_1 = -1 + i$ $z_2 = 8 + 4i$ $z_3 = -\frac{36}{4} - 3i$ $z_4 = 15 + 14i$

Correction 5.

(a) $x = -\frac{2}{5}$ ou $x = \frac{1}{5}$ (b) $x = \frac{6}{5}$ ou $x = 0$ ou $x = \frac{9}{10}$ (c) $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$

(d) $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{5}{3}$ (e) $x = -\frac{3}{4}$ ou $x = \frac{6}{7}$ (f) $x = \frac{5}{3}$ ou $x = \frac{7}{2}$