Polynômes

Dans ce chapitre, nous étudierons les polynômes formels : ils généralisent la notion de fonction polynômiale que nous avons déjà étudiée à des polynômes d'autres objets mathématiques (matrices, nombres complexes ...). Nous ne les étudierons pas en tant que fonction, avec des graphiques, mais en tant qu'objet, outil de calcul. Mais bien sûr, tout ce que nous avons vu sur les fonctions polynômiales reste valable, et s'étend dans une certaine mesure à ces polynômes formels.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espace vectoriel des polynômes

1) polynôme à une variable

Définition.

Un ***polynôme à coefficients dans*** $\mathbb{K}$ est une expression de la forme $P = a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ noté aussi $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ où n est un entier naturel et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
Les nombres a_0, a_1, ... sont les ***coefficients de*** P.
L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Exemples : $7 + 3X$; 3 ; $-4 + 7X - \frac{3}{4}X^{12}$ ... sont des polynômes à coefficients réels.

Utilisation : un polynôme est une expression, dans laquelle on peut remplacer X par divers objets mathématiques : une matrice carrée, un nombre réel, un nombre complexe ... tant que les opérations de multiplication par un scalaire, de produit et de somme de ces objets sont bien définies.
Par exemple, avec $P = -2 + 5X + 3X^2$:

- si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $P(A) = -2A^0 + 5A + 3A^2 = -2I_3 + 5A + 3A^2$ (le « -2 » de P correspond en fait à $-2X^0$).
- $P(-5) = -2 + 5(-5) + 3(-5)^2 = 48$
- $P(2i) = -2 + 5(2i) + 3(2i)^2 = -2 + 10i + 3 \times (-4) = -14 + 10i$

Lorsque le X est remplacé par une variable x réelle, le polynôme devient une ***fonction polynomiale*** définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$.

Définition : degré.

Le ***degré*** d'un polynôme non nul est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.
On note $\mathrm{d}^\circ P$ (ou $\deg(P)$) le degré du polynôme P.

Si le degré de P est n, alors :
⋆ le terme a_nX^n est le ***terme dominant***, a_n est le ***coefficient dominant*** ;
⋆ si $a_n = 1$, alors P est dit ***unitaire*** (ou ***normalisé***).

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exemples : -2 est un polynôme de degré 0.

$-1 + 3X$ appartient à $\mathbb{R}_1[X]$ (et à $\mathbb{R}_5[X]$ et à $\mathbb{C}_4[X]$ ...). Son coefficient dominant est 3.

$11X - 7iX^3$ est dans $\mathbb{C}_3[X]$ (et aussi dans $\mathbb{C}_8[X]$ ...). Son coefficient dominant est $-7i$.

Remarque : les polynômes de degré 0 sont appelés ***polynômes constants***.

$\boxed{\text{Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et les mêmes coefficients.}}$

2) opérations sur les polynômes

Soient deux polynômes non nuls : P de degré n et Q de degré m, on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.

On supposera $n \leqslant m$.
On définit les polynômes suivants :

- **la somme :** $P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \ldots + (a_n + b_n)X^n + \ldots + b_m X^m$
- **le produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:** $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$
- **le produit de P par Q :** $P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}$
- **la composée de P par Q :** $P \circ Q = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^{n} a_k (Q(X))^k$

$\mathbb{K}[X]$ muni de la somme et la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
Le neutre est le polynôme nul.

Explications du produit sur un exemple : $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.

$$\begin{aligned} PQ &= (a_0 + a_1X + a_2X^2)(b_0 + b_1X + b_2X^2) \\ &= a_0b_0 + a_0b_1X + a_0b_2X^2 + a_1b_0X + a_1b_1X^2 + a_1b_2X^3 + a_2b_0X^2 + a_2b_1X^3 + a_2b_2X^4 \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)X^3 + a_2b_2X^4 \end{aligned}$$

Le degré est 4 c'est bien $2 + 2$.

Le coefficient de X^2 est $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, cela correspond bien à $\sum_{p=0}^{2} a_p b_{2-p}$.

Exemples : Soient $P = 1 - 5X + 3X^2$ et $Q = 2X + X^3$.

$P + Q = 1 - 3X + 3X^2 + X^3$.

$7P = 7 - 35X + 21X^2$

$$\begin{aligned} PQ &= (1 - 5X + 3X^2)(2X + X^3) \\ &= 2X + X^3 - 10X^2 - 5X^4 + 6X^3 + 3X^5 \\ &= 2X - 10X^2 + 7X^3 - 5X^4 + 3X^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \circ Q &= 1 - 5(2X + X^3) + 3(2X + X^3)^2 \\ &= 1 - 10X - 5X^3 + 3(4X^2 + 4X^4 + X^6) \\ &= 1 - 10X + 12X^2 - 5X^3 + 12X^4 + 3X^6 \end{aligned}$$

Opérations et degré : $\boxed{\deg(\lambda P) = \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0 \text{ (et } -\infty \text{ si } \lambda = 0)}$

$\boxed{\deg(P + Q) \leqslant \max\{\deg(P) + \deg(Q)\}}$ et $\boxed{\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)}$ et $\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)}$.

Attention : pour la somme, le degré n'est pas toujours le maximum des deux : $P = 1 + X - X^2$ et $Q = 43 + X^2$ sont de degré 2 mais leur somme $P + Q$ est $44 + X$ qui est de degré 1.

Conséquence des degrés des résultats d'opérations : $\boxed{\mathbb{K}_n[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}[X]}$.

En effet :

⋆ Le neutre de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul, son degré $-\infty$ c'est plus petit que tout entier n donc le polynôme nul est dans $\mathbb{K}_n[X]$.

⋆ Montrons que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire : soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$, et λ dans $\mathbb{K}$.
$\deg(P + \lambda Q) \leqslant \max\{\deg(P) + \deg(Q)\}$.
Or $\deg(P) \leqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n$ car P et Q sont dans $\mathbb{K}_n[X]$.
Donc $\deg(P + \lambda Q) \leqslant n$ donc $P + \lambda Q \in \mathbb{K}_n[X]$. □

II. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1) diviseurs et multiples

Définition.

Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$.
On dit que A ***est un multiple de*** B (ou B divise A) si il existe un polynôme Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On peut noter $B|A$.

Exemples :

- $X - 2$ divise $X^2 - 4$ car $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$.
- le polynôme nul est un multiple de tous les polynômes.
- un polynôme constant (non nul) divise tout polynôme.

Propriété : division euclidienne.

Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul.
Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) avec $\deg(R) < \deg(B)$ tel $A = BQ + R$.
Q est le ***quotient*** et R le ***reste*** dans la ***division euclidienne*** de A par B.

Remarque : A est un multiple de B si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

Méthode : pour trouver Q et R on pose la division euclidienne de A par B.
Par exemple, avec $A = X^5 + 2X^3 - 3X^2 + X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$:

$$
\begin{array}{r|l}
X^5 + 0X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X - 1 & X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2}
-(X^5 - X^4 + X^3) & X^3 + X^2 + 2X - 2 \\ \hline
X^4 + X^3 - 3X^2 & \\
-(X^4 - X^3 + X^2) & \\ \hline
2X^3 - 4X^2 + X & \\
-(2X^3 - 2X^2 + 2X) & \\ \hline
-2X^2 - X - 1 & \\
-(-2X^2 + 2X - 2) & \\ \hline
-3X + 1 &
\end{array}
$$

D'après la division ci-contre :
$A = B(X^3 + X^2 + 2X - 2) + (-3X + 1)$.

2) racine et divisibilité

Définition d'une racine.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une ***racine*** de P si $P(\alpha) = 0$.
(autrement dit α annule la fonction polynomiale associée à P)

Propriété.

α est une racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P.

Démonstration :

« $\Longleftarrow$ » : si $(X - \alpha)$ divise P, alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$
donc $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$ donc α est une racine de P.

« $\Longrightarrow$ » : on effectue la division euclidienne de P par $X - \alpha$.
Il existe donc un polynôme Q et un polynôme R de degré strictement inférieur à 1 tels que $P = (X - \alpha)Q + R$.
R étant de degré strictement inférieur à 1, il est constant (éventuellement nul). On le note λ.
On a donc $P = (X - \alpha)Q + \lambda$, et donc en particulier, $P(\alpha) = 0Q(\alpha) + \lambda = \lambda$.
Ainsi, si α est une racine de P, alors $P(\alpha) = 0$.
Donc $\lambda = 0$ donc $P = (X - \alpha)Q$, autrement dit $(X - \alpha)$ divise Q. $\square$