Dérivabilité

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

☞ Exercice 1.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$?
Si oui, sa dérivée est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

3. h est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $h(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$.
Étudier la continuité et dérivabilité en 0.

★ Exercice 2.

On cherche à déterminer a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax + b & \text{sinon} \end{cases}$
soit continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

1. Justifier que f est continue et dérivable en tout point de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2. **(a)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit continue en 1.

(b) Calculer la dérivée à gauche en 1 de f.
En supposant que la condition pour que f soit continue en 1 est remplie, déterminer la dérivée de f à droite en 1.
En déduire nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit dérivable en 1.

(c) Conclure.

Exercice 3.

Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. Montrer que P' est également scindé.

★ Exercice 4.

Soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ avec $0 < a < b$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer l'existence de c dans $]a, b[$ tel que la tangente à la courbe représentative de f en c passe par l'origine.
on pourra étudier et utiliser la fonction φ définie sur $[a, b]$ par $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Exercise 5.

We want to prove that $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$. We will use two methods.

1. Use the mean value inequality theorem (on $[0, x]$).

★ **2.** Use the sign of two functions.

Exercice 6.

En utilisant la définition de la dérivabilité en a, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{\ln(x) - \ln(3)}{x - 3}$

2. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^5 + 1}{x + 1}$

★ **4.** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{\sin(\pi x)}$

★ **5.** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{e^{1+x} - e^{3-x^2}}{x - 1}$

★ **6.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{e^x - 1}$

Exercice 7.

Déterminer les développements limités à l'ordre 1 en 0 de

1. $f\ :\ x \mapsto \ln(1+x)$ **2.** $f\ :\ x \mapsto e^x$ **3.** $f\ :\ x \mapsto \sqrt{1+x}$ **4.** $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

☞ Exercice 8.

On note f la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+2)$.
On donne $\ln(2)\approx 0,7$ *et* $\ln(7)\approx 1,9$.

1. **(a)** Justifier que f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]-2,+\infty[$.

(b) Étudier les variations de g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$, et ses limites en -1 et $+\infty$.

(c) En déduire que l'équation $f(x)=x$ a une unique solution sur $]-1,+\infty[$. On la notera α. Justifier que $\alpha\in[0,\frac{3}{2}]$.

2. On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

(a) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,\frac{3}{2}]$.

(b) Démontrer que $\forall x\in[0,\frac{3}{2}],\ |f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$.
En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{2}\,|u_n-\alpha|$.

(c) Déduire de la relation précédente, que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha|\leqslant\frac{3}{2^{n+1}}$.

(d) Déterminer la limite de (u_n), ainsi qu'un entier n_0 pour lequel u_n est une valeur approchée de la limite à 10^{-6} près.

☞ Exercice 9.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x)=x^3\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x>0 \\ f(0)=0\end{cases}$.
Montrer que f est dérivable en 0, puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10.

Soit $f:[\frac{\pi}{2};\pi[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{\sin(x)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\frac{\pi}{2};\pi[$.

2. Montrer que f admet une réciproque, déterminer son intervalle de définition.
Que peut-on dire de f^{-1} en terme de dérivabilité ?