Équations et inéquations

Attention, les méthodes présentées ici sont à adapter à la situation, elles ne permettent pas forcément de résoudre toutes les équations ou inéquations !

Équations ou inéquations polynomiales : se ramener à 0 d'un côté, ce qui revient à déterminer des racines et étudier les signes (une fois l'expression factorisée, on peut faire un tableau).
Pour les racines :
⋆ degré 2 : formules de Δ ...
⋆ degré 3 ou plus : racine évidente puis division
(si α est une racine de P, alors on factorise par $(x-\alpha)$).
⋆ degrés supérieurs : s'il n'y a que des exposants pairs, on peut poser $X = x^2$ ... Exercice 1.(a)
(voir méthode ci-dessous)

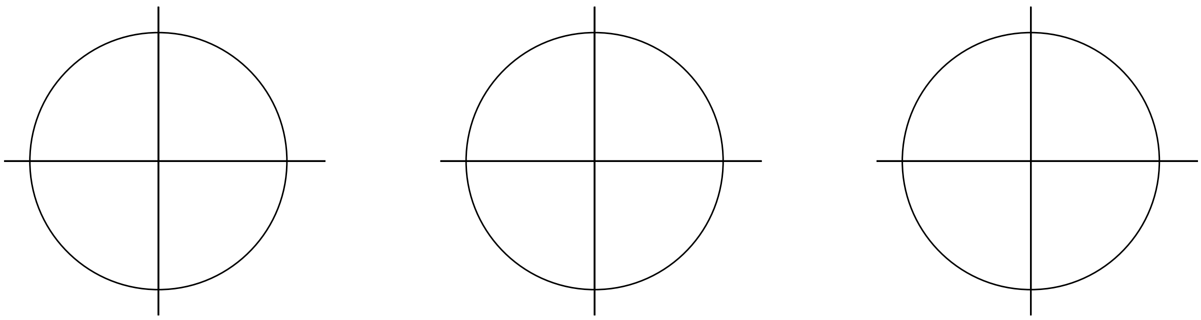
Équations se ramenant à un polynôme : en posant par exemple $X = e^x$ ou $X = \cos(x)$ ... on peut se ramener à un polynôme pour trouver X, puis à une (ou deux) équation(s) de type $e^x = X_1$ ou X_2, $\cos(x) = X_1$ ou X_2.

Par exemple pour $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$, on pose $X = \cos(x)$:
on résout $2X^2 + X - 1 = 0$ les solutions sont $\frac{1}{2}$ et 1, on résout alors $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\cos(x) = 1$.

Pour donner du sens, passer par la factorisation : $2X^2 + X - 1 = 2(X - \frac{1}{2})(X - 1)$
donc $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0 \Longleftrightarrow 2(\cos(x) - \frac{1}{2})(\cos(x) - 1) = 0 \ldots$
Exercice 1.(b) (c) (d)

Avec un carré : avec $c > 0$, $\boxed{x^2 = c \Longleftrightarrow x = \sqrt{c} \text{ ou } x = -\sqrt{c}}$ et $\boxed{x^2 < c \Longleftrightarrow -\sqrt{c} < x < \sqrt{c}}$

Avec des fonctions trigonométriques :



$$\boxed{\begin{array}{lcll} \sin(x) = \sin(\theta) & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \theta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \theta + 2k\pi \\ \cos(x) = \cos(\theta) & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \theta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\theta + 2k\pi \\ \tan(x) = \tan(\theta) & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \theta + k\pi \end{array}}$$

Exercice 2.

Attention : $\cos(3x) = \cos(\theta) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \theta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = -\theta + 2k\pi$
$\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

Avec une valeur absolue :

⋆ on peut utiliser une des règles ci-dessous pour enlever directement la valeur absolue :

$$\boxed{\begin{array}{l} |x| = 0 \text{ si et seulement si } x = 0 \\ \text{avec } c \geqslant 0,\ |x| = c \iff x = c \text{ ou } x = -c \\ \qquad\qquad\quad |x| \leqslant c \iff -c \leqslant x \leqslant c \end{array}}$$

Exercice 3. (a) (b) (c)

⋆ si tous les termes sont positifs on peut mettre au carré :

$$|2x-4| \leqslant |x-1| \iff |2x-4|^2 \leqslant |x-1|^2 \iff (2x-4)^2 \leqslant (x-1)^2$$

Exercice 3. (d)

⋆ on peut traiter les différents cas dans un tableau (*équations difficiles*) : Exercice 4. ★

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ -(f(x)) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Pour étudier un signe : Exercice 5.

⋆ lorsque c'est possible, résoudre directement l'« inéquation $\geqslant 0$ » (a) (b) (e)
(en dehors de la solution, l'expression sera négative)

⋆ si besoin, mettre au même dénominateur, factoriser pour simplifier le problème
puis faire un tableau de signes (d) (f)

⋆ étudier la fonction, ses variations et extrema. (c)

Pour comparer deux fonctions : Exercice 6.

si f et g sont dérivables sur I, pour montrer que $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$, on peut étudier le signe de la fonction $h = f - g$ (en la dérivant et étudiant ses variations).

De manière générale : Exercices 7. 8.

- Mettre tous les termes du même côté pour se ramener à une « équation $= 0$ » ou une étude de signe, et factoriser pour utiliser le théorème du produit nul, ou construire un tableau de signe.
- Isoler le(s) x :

  Pour cela, on peut effectuer les opérations habituelles ($+$, $-$, $\times$, $\div$) ou appliquer une fonction (ln, exp, inverse, racine carrée ...avec toutes les précautions d'usage !!).

  ⋆ pour « défaire » un $\times$, on divise $\div$; pour « défaire » un $-$, on utilise $+$ ...

  ⋆ pour « défaire » ln, on applique exp ; pour « défaire » exp, on applique ln.

  ⋆ pour « libérer » un x dans une puissance, il faut plusieurs étapes, l'une est toujours d'appliquer ln, puis la formule $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

  ⋆ pour « libérer » un x d'une fonction trigonométrique (cos, sin, tan) : en général, il y a deux solutions sur le cercle, le tout à 2π près. Et arcsin, arccos et arctan permettent d'en trouver une sur les deux. Et on peut toujours utiliser le cercle trigonométrique pour faire des vérifications.

  ⋆ avec des cos et des sin, il faut parfois commencer par la factorisation $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t-\varphi)$

  Précautions à prendre :

  ⋆ déterminer l'ensemble de définition, et vérifier que les solutions trouvées sont dans cet ensemble !
  Exercice 8. (a) (b)

  ⋆ toujours préciser l'opération effectuée ou la fonction appliquée, et éviter au maximum les opérations effectuées avec des x ...

  ⋆ dans les inéquations, préciser le sens de variation de la fonction appliquée pour justifier la conservation ou l'inversion du sens de l'inégalité

  ⋆ lorsque l'on applique une fonction, ne pas oublier les parenthèses : $\begin{array}{c} \ldots = \ldots\ldots \\ \ln(\ldots) = \ln(\ldots\ldots) \end{array}$

  ⋆ les équations se ramenant à $x^2 = A$, $|x| = A$, $\cos(x) = A$, $\sin(x) = A$, $\tan(x) = A$ ont (en général) plusieurs solutions !!