Sommes et produits

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

☞ Exercice 1.

1. Écrire les expressions suivantes sans signe Σ ni Π (avec des ... si besoin) :

$$\sum_{i=1}^{10}\sqrt{i} \qquad \prod_{n=0}^{6}(2n+3) \qquad \sum_{k=0}^{5}(k+1)^3 \qquad \prod_{p=1}^{n}(3p)^2 \qquad \sum_{m=3}^{11}\frac{(-1)^m}{m} \qquad \sum_{p=1}^{7}\left(\frac{1}{6}\right)^p$$

2. Écrire les expressions suivantes avec un signe Σ ou Π:

$A = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{11}$; $B(n) = (4-1)(8-1)\ldots(2^n-1)$; $C = \frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{12}{13}$

$D = 10+20+\ldots+140$ puis $E = 100+110+120+\ldots+240$

3. Écrire la somme suivante sans le signe Σ puis la calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2023}(-1)^k$.

Exercice 2.

Compléter chacun des calculs suivants (en écrivant les justifications !) :

$$\sum_{k=0}^{17}3^{k+2} = \sum_{n=\ldots}^{\ldots}3^n \qquad \sum_{i=11}^{20}2^i = \sum_{k=1}^{\ldots}\ldots \qquad \prod_{k=1}^{n}e^k = \prod_{p=2}^{\ldots}\ldots.$$

★ Exercice 3.

Écrire chacune des sommes suivantes avec un signe Σ et les calculer :

$S_1 = 2+7+12+\ldots+77+82$

$S_2 = 1-2+4-8+16-....+1024-2048$

$S_3 = \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{8}+...+\dfrac{3}{1024}$

☞ Exercice 4.

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{7}(-3)^k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{7}(-3k) \qquad S_3 = \sum_{m=4}^{11}\frac{1}{5^m} \qquad S_4(\ell) = \sum_{p=0}^{\ell}3^{p+2} \qquad S_5 = \sum_{k=0}^{7}\Big(3(k-2^k)+1\Big)$$

$S_6 = \displaystyle\sum_{k=3}^{60}\frac{k^2-k-2}{k-2}$ en utilisant le changement d'indice $j = k-2$

☞ Exercice 5.

On note $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{9}\Big(k^3-(k+1)^3\Big)$.

Écrire S sans symbole Σ et la calculer.

Exercice 6.

Calculer : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$; $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$; $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ puis $Q_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Indication pour T_n : $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$

☞ Exercice 7.

1. Développer $(2x-1)^5$, puis $(a+2b)^6$puis $(1-\sqrt{3})^5$.

2. Quel est le coefficient de x^3 dans l'expression $(2+\frac{1}{2}x)^8$? et dans l'expression $(1-2x)^n$?

3. Exprimer en fonction de n les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k5^{n-k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k.$$

★ **4.** Montrer que pour tout entier naturel n, $(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n$ est un entier.

★ Exercice 8.

1. On considère n boules, et deux boîtes A et B. On veut répartir p boules parmi les n dans les deux boîtes A et B, en en mettant une dans la boîte A et $p-1$ dans la boîte B.
En dénombrant les répartitions possibles de deux manières différentes, montrer que $p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$.

2. Application : calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$.

Correction. indications

1. On peut choisir la boule qu'on met dans la boîte A (n choix) puis les $p-1$ qu'on met dans la B parmi les $n-1$ qui restent, soit $\binom{n-1}{p-1}$ donc $n\binom{n-1}{p-1}$ choix.
Ou on peut choisir les p boules qu'on va répartir, $\binom{n}{p}$ choix, et parmi celles là, celle que l'on met dans la A, p choix, donc au total $p\binom{n}{p}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}$ on sort le n, on change d'indice avec $p=k-1$, et on obtient $n2^{n-1}$.