Sommes et produits

Le nom *somme* vient du latin *summa linea*, c'est-à-dire la ligne du haut (au sommet). En effet les romains avaient l'habitude de noter le résultat de leurs calculs sur la ligne du haut.

À la Renaissance, les commerçants ont appris l'utilisation des chiffres arabes et des opérations, en particulier la multiplication, qui permet d'obtenir la recette de la vente en connaissant le nombre d'objets vendus et leur prix unitaire. Ce résultat a été désigné par le même mot que le *produit* vendu.

I. Définition et propriétés des symboles

1) Définition des symboles

Le symbole Σ permet une notation raccourcie des écritures de sommes, et évite l'utilisation de points de suspension.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ se lit « la somme des 2^k pour k allant de 0 à n », et est défini par $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n}$.

k est appelé l'***indice de sommation***, il prend toutes les valeurs entières entre la borne du bas (ici 0) et celle du haut (ici n), c'est-à-dire qu'il vaut 0, puis 1, puis 2, etc …jusqu'à n.

Le symbole Π est l'analogue du symbole Σ dans le cadre des produits :

$\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ se lit « le produit des $1 - \frac{1}{k}$ pour k allant de 3 à n ».

Il est défini par $\boxed{\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$.

Exemples : Si (u_n) est une suite quelconque, $\displaystyle\sum_{k=2}^{7} u_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

et $\displaystyle\prod_{k=2}^{6} (u_k - 1) = \ldots$

$$\sum \ldots\ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p}$$

$$\sum_{k=1}^{11} 2k = \ldots$$

$$\prod \ldots\ldots = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \ldots \times \frac{1}{1024}$$

$$\prod_{k=0}^{8} 2 = \ldots$$

Remarques :

- L'indice est ***muet***, c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas de la lettre : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{p=0}^{n} 2^p = \sum_{\ell=0}^{n} 2^\ell \ldots$ mais attention, on ne peut pas utiliser la même lettre pour représenter différents nombres, en l'occurrence ici, l'indice ne peut pas être appelé n car n représente déjà la valeur maximale de l'indice.

- Certaines sommes et certains produits ne peuvent pas s'écrire avec Σ.
Par exemple, $u_0 + u_3 + u_4 + u_8 + u_{11}$ ne peut pas s'écrire avec Σ car …

2) Règles de calcul

- On peut **inclure ou sortir un terme** de la somme ou du produit : pour $p < n$,

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=p}^{n} u_k\right) + u_{n+1}}$$ par exemple, $\left(\sum_{k=3}^{8} u_k\right) = \ldots$

$= \ldots$

De même, $$\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots = \left(\prod_{k=p}^{n} u_k\right) \times u_{n+1}}.$$

- On peut **séparer ou regrouper** des symboles Σ ou Π dont les indices varient entre les mêmes bornes :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} v_k}$$ par exemple, $\sum_{k=1}^{4}(2^k + 3k) = \ldots$

$= \ldots$

$= \ldots$

De même, $$\boxed{\prod_{k=p}^{n}(u_k \times v_k) = \prod_{k=p}^{n} u_k \times \prod_{k=p}^{n} v_k}$$ et aussi $$\boxed{\prod_{k=p}^{n} \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} u_k}{\prod_{k=p}^{n} v_k}}$$

par exemple, $\prod_{k=1}^{4} \frac{k}{2^k} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$

- On peut **factoriser et développer** :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} u_k}$$

par exemple, $\sum_{k=1}^{n} 2u_k = \ldots$

$= \ldots$

$= \ldots$

ce n'est pas la même formule avec le produit : $$\boxed{\prod_{k=p}^{n}(\lambda u_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} u_k}$$

Par exemple : $\prod_{k=0}^{5}(2u_k) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- On peut **changer d'indice** : $\sum_{p=3}^{7} \frac{1}{p-2} = \sum_{n=\ldots}^{\ldots} \frac{1}{n}$ en posant $n = p - 2$ soit $p = \ldots\ldots$

or p va de $\ldots\ldots$ à $\ldots\ldots$

donc n va de $\ldots\ldots$ à $\ldots\ldots$

En effet, $\sum_{p=3}^{7} \frac{1}{p-2} =$

$=$

$= \sum_{n=\ldots}^{\ldots} \frac{1}{n}$

Idem avec le produit, par exemple $\prod_{k=2}^{n}(k-1)3^k$

- **Sommes et produits télescopiques :**

  Exemple : simplification en cascade entre 0 et n (pour $n \geqslant 1$) :
  $\sum_{k=0}^{n}\Big(u_k - u_{k+1}\Big) = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}$

  Bilan : $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}}$.

  (on peut le retenir, mais savoir le retrouver rapidement est mieux).

  Astuce : $\boxed{\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}}$ permet de faire apparaître une somme télescopique (cf. **Exercice 6**).

  Justification de l'astuce :

  Exemple avec le produit : $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{k} =$

Remarque importante : toutes ces règles sont issues de règles de calcul habituelles sur les sommes et les produits, donc en cas de doute, réécrire la formule sans le symbole et avec les points de suspension pour vérifier la validité !

II. Sommes et produits usuels

1) somme ou produit d'une constante

Soit C dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\boxed{\sum_{k=0}^{n} C = C \times (n+1)}$ et $\boxed{\prod_{k=0}^{n} C = C^{n+1}}$

Généralistion : $\boxed{\sum_{k=p}^{n} C = C \times (n-p+1) = C \times (\text{nombre de termes})}$ et $\boxed{\prod_{k=p}^{n} C = C^{n-p+1} = C^{\text{nombre de termes}}}$.

En effet,

Exemple : $\sum_{k=0}^{7} 3 = \ldots$

2) sommes d'entiers consécutifs

$\boxed{1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ noté aussi $\boxed{\sum_{\ldots}^{\ldots} \ldots = \frac{n(n+1)}{2}}$

En effet, si on définit $S = 1+2+\ldots+n$:

De manière générale $\boxed{\sum_{k=p}^{n} k = (n-p+1)\frac{p+n}{2} = \text{nombre de termes} \times \text{moyenne des extrémités}}$.

Exemple :

3) somme de puissances consécutives

<u>Si $q \neq 1$:</u> $\boxed{1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ noté aussi $\boxed{\sum_{\ldots}^{\ldots} \ldots = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

En effet : $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n) = \ldots$

De manière générale $\boxed{\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$.

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=4}^{17} 3^k =$

4) produit d'entiers consécutifs : rappel sur la notation factorielle

Définition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ est appelé ***factorielle*** n (ou n ***factorielle***) et est noté $n!$.
Autrement dit $\boxed{n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$.
Par convention, $0! = 1$.

Exemples : $1! = \ldots.$ $3! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{11!}{8!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{99!}{100!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$n(n-1)! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(n+1) \times n! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

III. Généralisation des identités remarquables

1) factorisation

On va généraliser la formule : $a^2 - b^2 = \ldots$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}$

Autrement dit $\boxed{a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k}$.

pour $n = 3$ **:**

pour $n = 4$ **:**

2) développement par binôme de Newton

On va généraliser la formule $(a+b)^2 = \ldots$

Théorème. *Formule du binôme de Newton.*

Soient a et b deux réels, et n un entier naturel non nul, alors :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$
$$= \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

on peut aussi écrire $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

Cette formule justifie le nom de ***coefficients binomiaux***.

Explications sur $(a+b)^5$ **:**

Exemples : développer les expressions suivantes avec la formule du binôme de Newton :
$(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $(x-2)^4$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$