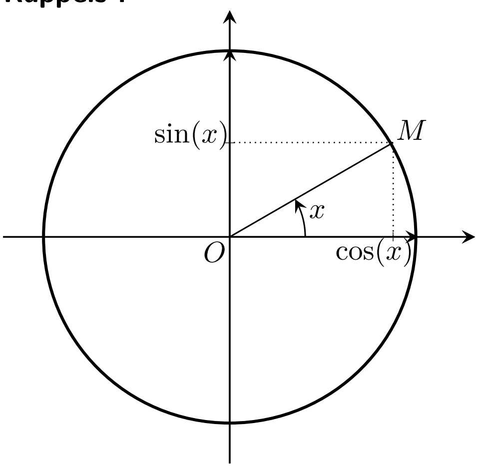
Fonctions circulaires.

Rappels :



Définition.

Dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, on associe à tout nombre x le point M du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{OM})=x$.

- L'abscisse du point M est appelée ***cosinus de*** x, noté $\cos(x)$.
- L'ordonnée de M est appelée ***sinus de*** x, noté $\sin(x)$.

Les fonctions cos et sin sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$.

Propriété.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}$.

I. Fonctions Sinus et Arcsinus

1) Sinus

Propriétés.

⋆ La ***fonction sinus*** est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$.

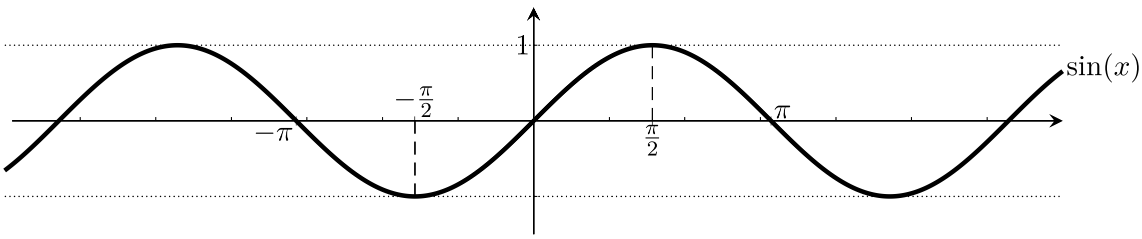
⋆ Elle est 2π-périodique : ....

⋆ Elle est impaire : ....

⋆ Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $\sin'(x)=$ ......

(et donc si u est dérivable, $x\mapsto\sin(u(x))$ a pour dérivée $x\mapsto$ ....)

⋆ Limite remarquable : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\ldots$.

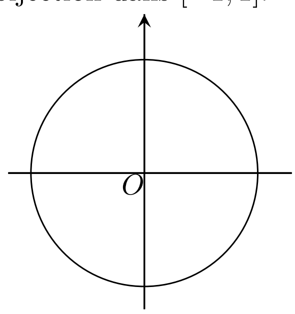


2) Arcsinus

x	$-\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$-1 \nearrow 1$

La fonction sinus n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$.
Mais elle est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, et d'après le tableau des variations $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]$.
Donc sa restriction à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection dans $[-1,1]$.

Définition.



On appelle ***arcsinus*** la bijection réciproque de la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ (restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$).

Autrement dit, $\begin{array}{rccl}\arcsin: & [-1;1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & y \text{ tel que } \sin(y)=x\end{array}$

Exemples : $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\ldots$ car ....

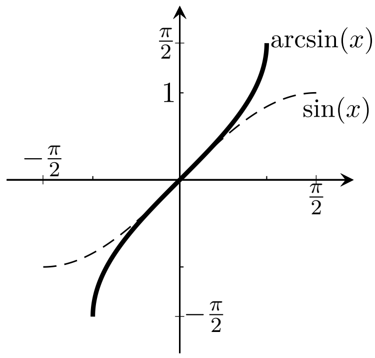
$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\ldots$ $\qquad$ $\arcsin(-1)=\ldots$

Conséquences de la définition : $\boxed{\forall x \in \dots\dots\dots\dots,\ \arcsin(\sin(x)) = \dots}$

$\boxed{\forall x \in \dots\dots\dots\dots,\ \sin(\arcsin(x)) = \dots}$

Propriétés de la fonction Arcsinus.

- ⋆ La fonction Arcsinus est définie sur $[-1;1]$ et prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
- ⋆ Elle est dérivable sur $]-1;1[$ et $\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.
- ⋆ Elle est strictement croissante sur $[-1;1]$, et impaire.
(comme sin)

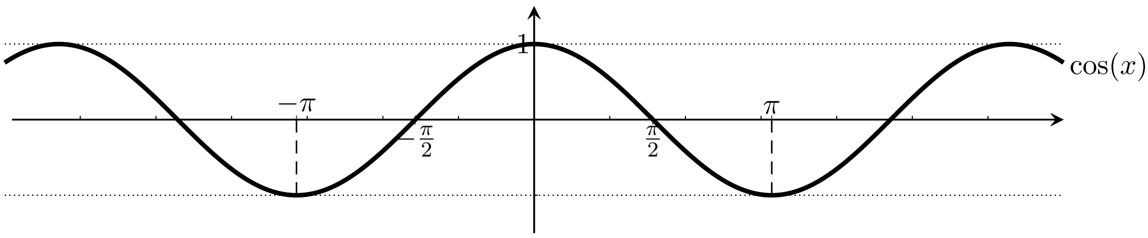


II. Fonctions Cosinus et Arccosinus

1) Cosinus

Propriétés.

- ⋆ La ***fonction cosinus*** est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$.
- ⋆ Elle est 2π-périodique : ....
- ⋆ Elle est paire : ....
- ⋆ Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $\cos'(x) = \dots\dots$
(et donc si u est dérivable, $x \mapsto \cos(u(x))$ a pour dérivée $x \mapsto \dots\dots\dots\dots\dots\dots$)



2) Arccosinus

x	0	π
$\cos(x)$	1 ↘	-1

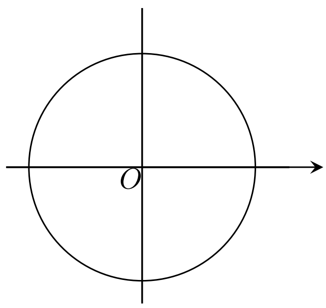
La fonction cosinus n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$.
Mais elle est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, et d'après le tableau des variations $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$.
Donc $\cos|_{[0,\pi]}$ est une bijection dans $[-1,1]$.

Définition.

On appelle ***arccosinus*** la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0,\pi]}$ (restriction de la fonction cosinus à $[0,\pi]$).

Autrement dit, $\arccos : [-1;1] \to [0,\pi]$

$x \mapsto y$ tel que $\cos(y) = x$



Exemples : $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dots\dots$ car ....

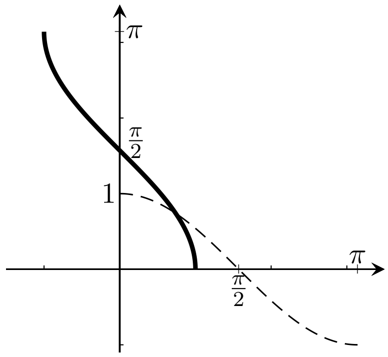
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$ $\arccos(-1) = \dots$

Conséquences de la définition : $\boxed{\forall x \in \dots\dots\dots\dots,\ \arccos(\cos(x)) = \dots}$

$\boxed{\forall x \in \dots\dots\dots\dots,\ \cos(\arccos(x)) = \dots}$.

Propriétés de la fonction Arccosinus.

- $\star$ La fonction Arccosinus est définie sur $[-1;1]$ et prend ses valeurs dans $[0,\pi]$.
- $\star$ Elle est dérivable sur $]-1;1[$ et $\boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.
- $\star$ Elle est strictement décroissante sur $[-1;1]$ (comme cos).



III. Fonctions Tangente et Arctangente

1) Tangente

Définition.

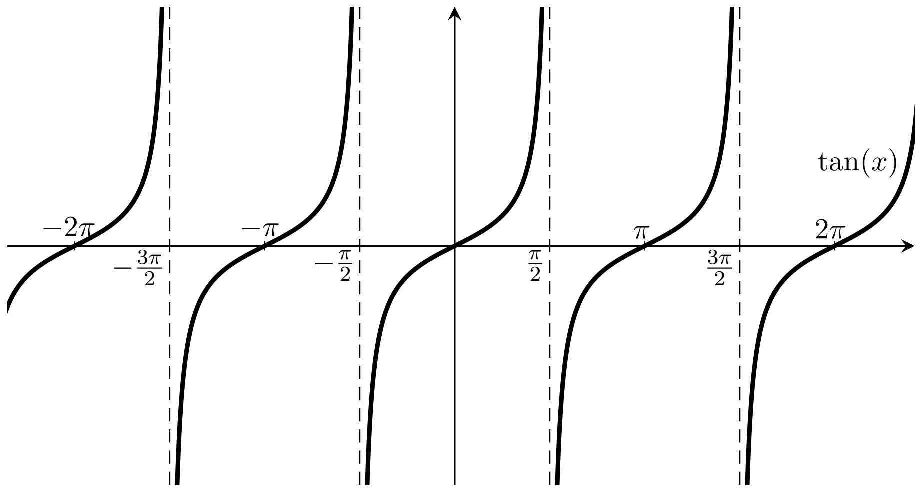
La ***fonction tangente*** est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ par $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Propriétés.

La ***fonction tangente*** est :

- $\star$ π-périodique : ....
- $\star$ impaire : ....
- $\star$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ et pour tout x de cet ensemble, $\boxed{\tan'(x) = \text{.....................}}$

  (si u est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, on a $\tan(u)' =$..........................)
- $\star$ Limites remarquables : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty$.



Démonstrations de la dérivée et des limites :

2) Arctangente

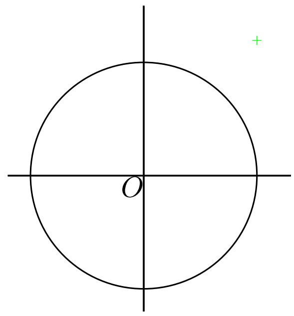
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et d'après le tableau des variations, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty, +\infty[$.
Donc la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection dans $\mathbb{R}$.

Définition.

On appelle ***arctangente*** la bijection réciproque de la fonction $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$ (restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$).

Autrement dit, $\arctan : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \mapsto & y \text{ tel que } \tan(y) = x \end{array}$



Exemples : $\arctan(1) = \ldots\ldots$ car $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\arctan(-\sqrt{3}) = \ldots$; $\arctan(0) = \ldots.$

Conséquences de la définition :

- $\forall x \in \ \ldots\ldots\ldots\ldots, \arctan(\tan(x)) = \ldots$
- $\forall x \in \ \ldots\ldots, \ \tan(\arctan(x)) = \ldots$
- $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \ \arctan(\tan(x)) =$

Propriétés de la fonction Arctangente.

$\star$ La fonction Arctangente est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$\star$ Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\arctan'(x) = \ldots\ldots}$.

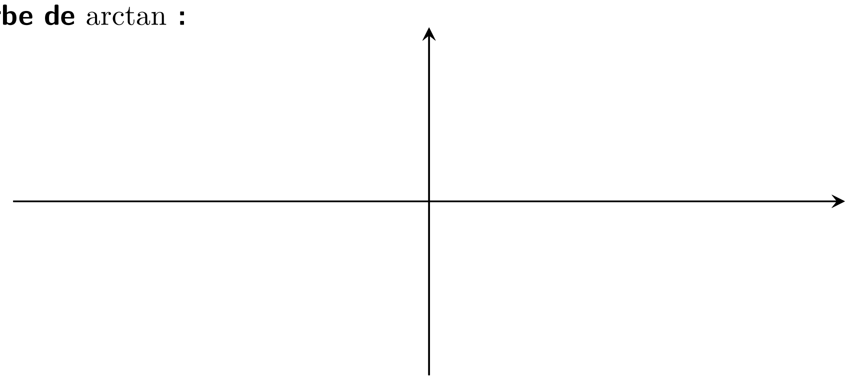
(et pour toute fonction u dérivable, $(\arctan(u))' = \ldots\ldots$)

$\star$ Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et impaire.

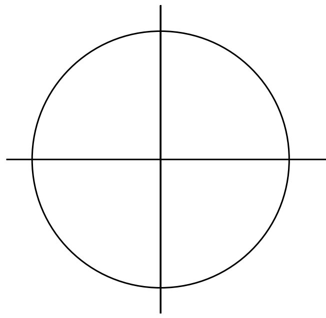
$\star$ Limites remarquables : $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = \ldots\ldots$ et $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \ldots\ldots$

Quelques justifications :

Courbe de $\arctan$ **:**



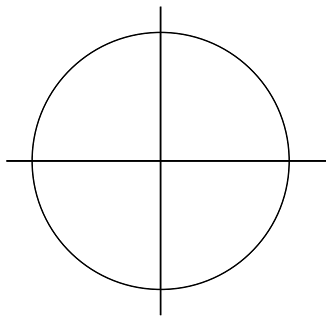
IV. Équations trigonométriques (rappels et compléments)



1) Équations $\sin(x) = a$ ou $\sin(x) = \sin(\theta)$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \sin(x) = a & \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \arcsin(a) + 2k\pi & \text{ou} & x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi \\ \sin(x) = \sin(\theta) & \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \theta + 2k\pi & \text{ou} & x = \pi - \theta + 2k\pi \end{array}}$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = \frac{1}{4}$.

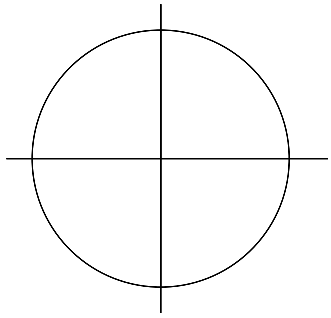


2) Équations $\cos(x) = a$ et $\cos(x) = \cos(\theta)$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \cos(x) = a & \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \arccos(a) + 2k\pi & \text{ou} & x = -\arccos(a) + 2k\pi \\ \cos(x) = \cos(\theta) & \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \theta + 2k\pi & \text{ou} & x = -\theta + 2k\pi \end{array}}$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Équation $\tan(x) = a$ ou $\tan(x) = \tan(\theta)$



$$\boxed{\begin{array}{ccc} \tan(x) = a & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \arctan(a) + k\pi \\ \tan(x) = \tan(\theta) & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad x = \theta + k\pi \end{array}}$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$ l'équation $\tan(x) = \frac{1}{4}$.

Attention : dans les calculs, utiliser la notation $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \ldots + 2k\pi$ plutôt que $\theta = \ldots [2\pi]$ pour en tenir compte correctement à chaque opération.

Méthode : pour se ramener à des équations simples (comme ci-dessus), on peut utiliser des opérations, mais aussi des formules de trigonométrie.

Exemple : résolution dans $\mathbb{R}$ puis $[0, 2\pi[$ de l'équation (E) : $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$.