

DÉTERMINATION DE PRIMITIVES ET CALCUL D'INTÉGRALES.

I. Primitives

1) Qu'est-ce qu'une primitive ?

Définition.

Soient f et F deux fonctions définies sur \mathcal{D} .

On dit que F est une **primitive** de f si F est dérivable et $F' = f$.

Propriété.

Si F est une primitive de f sur \mathcal{D} , alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + C$ où C est un nombre réel, sont des primitives de f sur I , et toutes les primitives s'écrivent ainsi.

2) Trouver des primitives

a. Primitives usuelles, sommes et produit par un réel.

Si F et G sont des primitives de deux fonctions f et g , alors :

- ★ $F + G$ est une primitive de $f + g$ (car $(F + G)' = F' + G' = f + g$).
- ★ $2F$ est une primitive de $2f$; $0,5F$ de $0,5f$... etc ... : aF est une primitive de af (car).



Attention : ce n'est pas aussi simple avec un produit ou un quotient : $F \times G$ n'est pas une primitive de $f \times g$.
En effet, $(F \times G)' = F'G + FG'$ (et non $F'G'$), même chose $\left(\frac{F}{G}\right)' \neq \frac{F'}{G'}$.



Pour trouver des primitives de f et g , on peut reconnaître des formes, et utiliser les formules de dérivées correspondantes.



Attention : une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(|x|)$
une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ lorsque u ne s'annule pas est $x \mapsto \ln(|u(x)|)$

Pour $x < 0$, dériver $f : x \mapsto \ln(-x)$:

Exemple : $f(x) = 7x^2 + 3x + \frac{1}{x}$:

Exemple : cherchons les primitives de $f(x) = x(x^2 - 1)^3$.

Cette fonction est sous la forme d'une puissance, $(x^2 - 1)^3$, multipliée avec x , qui ressemble à la dérivée de $x^2 - 1$ à peu près.

	Primitives		Dérivées	
<i>La formule que l'on utilise est donc :</i>	$(u(x))^4$	$\xrightarrow{\text{a pour dérivée}}$	$4u'(x)(u(x))^3$	avec $u(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 2x$
<i>On remplace $u(x)$ et $u'(x)$:</i>	$(x^2 - 1)^4$		$4 \times 2x(x^2 - 1)^3$	
<i>On ajuste le coefficient :</i>	$\frac{1}{8}(x^2 - 1)^4$	$\xleftarrow{\text{a pour primitive}}$	$x(x^2 - 1)^3$	$\div 8$

Les primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{8}(x^2 - 1)^4 + C$ avec C dans \mathbb{R} .

Étapes de la méthode :

1. identifier la formule de dérivation à utiliser, et le $u(x)$, et l'écrire en 1ère ligne du « tableau »;
 2. remplacer rigoureusement le $u(x)$ et le $u'(x)$, et le n le cas échéant ;
 3. à partir du résultat de la formule, on cherche à retrouver la fonction de départ au bas de la colonne de droite, par des multiplications et des divisions par des nombres qui ne contiennent pas de x .
- Si on n'y arrive pas, c'est que l'on s'est trompé de formule de départ, ce n'est pas grave, on réessaie avec une autre formule (ajuster le n éventuellement).



Attention : les opérations d'une ligne à l'autre doivent préserver le lien primitives-dérivées des colonnes. Donc on ne peut que multiplier ou diviser, par un nombre, pas de x , et pas d'addition ou soustractions !



Si la fonction à primitiver est une somme, primitiver séparément chaque terme (si besoin avec la méthode ci-dessus), puis ajouter les primitives obtenues.

Exemple : donner les primitives de la fonction f d'expression $f(x) = \frac{x}{(3x^2+7)^5} + e^{-3x+1}$.

II. Intégrales

$\int_a^b f(t) dt$ est un nombre appelé **intégrale de la fonction f entre a et b** .

Il représente l'aire sous la courbe de f entre les abscisses a et b .

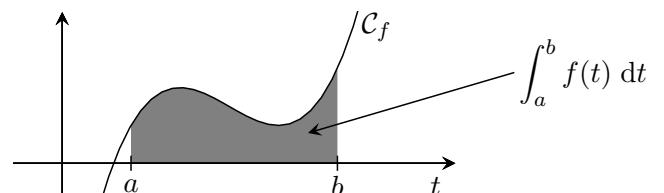
En notant F une primitive de f , alors

$$\boxed{\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)}.$$

Exemple : calcul de $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$:

• $t \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ (si elle est très simple on peut sauter cette étape, mais si elle est compliquée cela peut être plus long !)

• Donc
$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(1+1^2) - \frac{1}{2} \ln(1+0^2) = \frac{1}{2} \ln(2)$$



Propriété de linéarité :
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} : \int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g}.$$

Exemple : $\int_1^3 2 \ln(x) - 7x^2 dx = \dots$