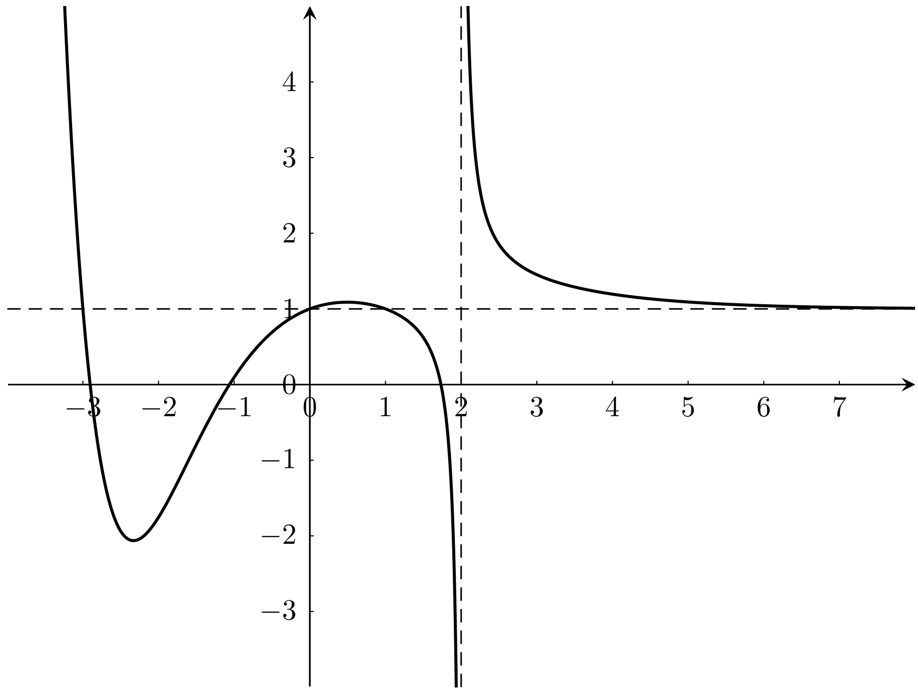
Calculs de limites.

I. Introduction

Déterminer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ revient à décrire le comportement de $f(x)$ (axe des ordonnées) lorsque x (axe des abscisses) « se rapproche » de a.



Par exemple, sur la courbe de la fonction f représentée ci-dessus, il semble que :

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$: la courbe de f devient infiniment proche de la droite d'équation $y = 1$.
  On dit que la droite d'équation $y = 1$ est ***asymptote horizontale*** à la courbe en $+\infty$.
- $f(x)$ n'a pas de limite en 2, mais $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \ldots$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \ldots$.
  On dit que la droite d'équation $x = 2$ est ***asymptote verticale*** à la courbe.

II. Cas général

1) Rappel sur les limites de référence

Ces limites se déduisent de l'observation des courbes des fonctions de référence :

⋆ puissances n, avec $n > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et pour n pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ « la limite de x^n lorsque x tend vers $-\infty$ est $+\infty$ »
pour n impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

⋆ inverses de puissances : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et pour n pair, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
pour n impair, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

⋆ racine carrée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

⋆ logarithme : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

⋆ exponentielle : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2) Opérations sur les limites

Notations : $\bullet$ peut représenter un nombre fini ou $+\infty$ ou $-\infty$
ℓ et ℓ' sont des nombres finis
FI signifie « forme indéterminée »: c'est une situation où il n'y a pas de réponse générale, il faut traiter au cas par cas. Le résultat pourrait être $-\infty$ ou $+\infty$ ou un nombre fini.

Somme de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x) =$	ℓ			$+\infty$		$-\infty$
si $\lim\limits_{x\to\bullet} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x)+v(x) =$						

On traite la différence de deux fonctions de la même façon, en utilisant le fait que $u(x)-v(x) = u(x)+(-v(x))$.

Produit de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x) =$	ℓ	$\ell\neq 0$		0	$+\infty$	
si $\lim\limits_{x\to\bullet} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x)\times v(x) =$						

Inverse d'une fonction

si $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x) =$	$\pm\infty$	$\ell\neq 0$	0
alors $\lim\limits_{x\to\bullet} \dfrac{1}{u(x)} =$			$+\infty$ ou $-\infty$

$$\begin{cases} \text{si de plus } u(x)>0 \text{ autour de } \bullet\text{, alors } \lim\limits_{x\to\bullet} \dfrac{1}{u(x)} = +\infty \\ \text{si de plus } u(x)<0 \text{ autour de } \bullet\text{, alors } \lim\limits_{x\to\bullet} \dfrac{1}{u(x)} = -\infty \end{cases}$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{8-2x}$:

Quotient de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x) =$	ℓ	$\ell\neq 0$ ou $\pm\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
si $\lim\limits_{x\to\bullet} v(x) =$	$\ell'\neq 0$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\bullet} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$					

Méthode : pour étudier la limite d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0, on étudie le signe du dénominateur, éventuellement dans un tableau de signe.

Composition

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & u(x) & \mapsto & v\circ u(x) \\ & & X & \mapsto & v(X) \end{array} \qquad \text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{X\to\ell_1} v(X) = \ell_2 \end{cases}, \quad \text{alors } \lim\limits_{x\to\alpha} v\Big(u(x)\Big) = \ell_2.$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}$

III. Limites particulières

1) Taux d'accroissement

On verra par la suite que si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
Cela nous permet d'obtenir les limites particulières suivantes :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Exemples : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-e^x}$?

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^3}$?

2) Croissances comparées

- **Théorème des croissances comparées.**

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0.$$

Exemples : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x+1)e^x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

IV. Lever les indéterminations

Les formes indéterminéees sont : ....

1) Changer la forme

a. Factoriser par le terme dominant

- pour une forme de type « $\infty - \infty$ »: factoriser par le terme « le plus puissant » (terme ***dominant***).

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2$?

- pour une forme de type « $\frac{\infty}{\infty}$ »: factoriser numérateur et dénominateur par leur terme dominant (puis simplifier la fraction si c'est possible)

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x + \ln(x)}$?

- cas particuliers d'un polynôme ou fraction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$:

  $\star$ la limite d'un polynôme en $\pm\infty$ est celle de son terme de plus haut degré ;
  $\star$ la limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et dénominateur.

Exemples : $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 - 3x^2 + 11x + 2 = \dots$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-4x^2 + 11x - 6}{12x^4 - 3x^3 + 2x - 4} = \dots$$

b. Forme conjuguée

Pour les expressions de type $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ dont la limite est indéterminée, on peut utiliser la « forme conjuguée » $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et une identité remarquable : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$?

2) Encadrements, comparaison

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes).

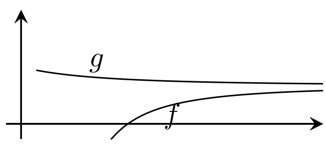
f, g et h trois fonctions définies sur un même intervalle I, avec pour tout x de I : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to \cdot} f(x) = \lim\limits_{x \to \cdot} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to \cdot} g(x) = \ell$.

Exemple : on veut déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Théorème de comparaison.

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$:
- si $\lim\limits_{x \to \cdot} f(x) = +\infty$, alors
- si $\lim\limits_{x \to \cdot} g(x) = -\infty$, alors
- si $\lim\limits_{x \to \cdot} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \cdot} g(x) = \ell'$, alors

Attention : dans le dernier • même si $f(x) < g(x)$, alors $\ell \leqslant \ell'$.
sur le dessin ci-contre, $f(x) < g(x)$, pourtant elles ont la même limite



Exemple : $f(x) = x^2 + \cos(x)$, quelle est sa limite en $+\infty$?