Espaces vectoriels.
A - Généralités

★ Exercice 1.

Soient $(E, +_E, .)$ et $(F, +_F, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On définit une addition sur $E \times F$ par $(u, v) + (u', v') = (u +_E u', v +_F v')$ (addition par composante), et la multiplication par un scalaire $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ (multiplication de chaque composante).
Vérifier que $E \times F$ muni de ces deux opérations est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

☞ Exercice 2.

Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
$A = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$
$B = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1\}$

Exercice 3.

Pour chacun des ensembles ci-dessous, déterminer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ou pas.

$$A = \left\{ \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{v} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ orthogonaux} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\}$$

☞ Exercice 4.

Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ sous-espace de $\mathbb{R}^2$?
2. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ s'annule au moins une fois}\}$ sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
3. $C = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = b + c \right\}$ sous-espace de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$?
4. D ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$, sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
5. $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sous-espace de $\mathbb{C}$?
6. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\}$ sous espace de $\mathbb{K}[X]$?

★ Exercice 5.

Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6.

Soient $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (1, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 3, 6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Trouver trois réels non tous nuls α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
Que peut-on en déduire pour la famille (v_1, v_2, v_3) ?

☞ Exercice 7.

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. famille (P,Q,R) avec $P = 1 + X^2$, $Q = X^2$ et $R = 2 + 3X$.

2. famille (A,B,C) avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ 2 & 14 & -7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ? de l'espace vectoriel E.

1. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère la famille (u,v) où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2$ et $v_n = n + 1$;

2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille considérée est (f_1, f_2, f_3) où $\forall k \in \{1,2,3\}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = e^{kx}$.

Exercice 9.

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les écrivant sous la forme de sous-espaces vectoriels engendrés par une famille.

☞ **1.** $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 3y + 4z = 0\}$

2. $B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f'' + f = 0\}$

3. $C = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \,|\, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ 3a-b & a \end{pmatrix} \right\}$

4. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$

Exercice 10.

1. **(a)** Déterminer l'ensemble F des solutions du système $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$.

(b) Justifier que F est un espace vectoriel et en déterminer une base.

2. On considère les deux plans vectoriels P_1 et P_2 d'équations respectives $x - y + z = 0$ et $x - y = 0$. Trouver un vecteur directeur ainsi qu'une équation paramétrée de la droite $D = P_1 \cap P_2$.

3. Montrer que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z - t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

☞ Exercice 11.

Montrer que les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = 1 + X$ et $P_2 = 1 + X + X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et préciser les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans cette base.