Espaces vectoriels
A - Introduction

La notion d'espace vectoriel naît petit à petit au cours du 19ème siècle, dans le but de formaliser l'espace qui nous entoure, mais ils permettent aussi de mieux visualiser des théories plus abstraites.

Dans un premier temps, le vecteur algébrique, en coordonnées, permet de résoudre des problèmes géométriques sans figures (dans le même état d'esprit, la géométrie descriptive de Gaspard Monge (1746 - 1818) contribue à évacuer la figure en transformant son mode de représentation, pour, disait-il, s'affranchir « de cette complication des figures dont l'usage distrait de l'attention qu'on doit au fond des idées »).

Ce sont Hermann Grassmann (1809-1877), puis Giuseppe Peano (1848-1932) qui formalisent les opérations sur les vecteurs, et permettent d'axiomatiser les espaces vectoriels.

Parallèlement, Arthur Cayley introduit les matrices, et les opérations sur les n-uplets, ouvrant la voie à des dimensions plus grandes que 3.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition.

Un $\mathbb{K}$-***espace vectoriel*** est un ensemble E non vide muni :

⋆ d'une loi d'addition entre ses éléments, notée $+$ vérifiant :

- $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v \in E$ (loi ***interne***)
- $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v = v+u$ (la loi est ....
- $\forall (u,v,w) \in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$ (la loi est ....
- $\exists e \in E, \forall u \in E,\ u+e = u$ et $e+u = u$ (e est le neutre de l'addition, on le note en général 0_E)
- $\forall u \in E, \exists u' \in E,\ u+u' = e$ (u' est l'opposé de u, noté $-u$)

⋆ d'une loi de multiplication d'un élément de $\mathbb{K}$ par un élément de E, notée . vérifiant :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall u \in E,\ \lambda.u \in E$ (loi ***externe*** sur E)
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall u \in E,\ (\lambda\mu).u = \lambda(\mu u)$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall u \in E,\ (\lambda+\mu).u = \lambda.u + \mu.u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall (u,v) \in E^2,\ \lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$ (. est ***distributive*** par rapport à $+$)
- $\forall u \in E,\ 1.u = u$

Vocabulaire : les éléments de E sont appelés des ***vecteurs***, et les éléments de $\mathbb{K}$ des ***scalaires***.
On parle alors de ***vecteur nul*** pour le neutre de l'addition.
On écrit parfois $(E,+,.)$ pour désigner l'ensemble E et les deux opérations associées.

I. Espaces vectoriels de référence

1) les ensembles $\mathbb{K}^n$

- L'ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

  Les éléments sont définis par leurs coordonnées $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

  ⋆ <u>loi d'addition interne :</u> $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$;

  le neutre est ...

  ⋆ <u>loi de multiplication externe :</u> $\lambda\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

  Quelques justifications :

- De même pour les vecteurs de l'espace : $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
- et on peut aussi étendre cette propriété à tous les ensembles $\mathbb{K}^n$:

$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ ,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des deux opérations :
⋆ loi d'addition interne : $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n)$;
le neutre est
⋆ loi de multiplication externe : $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

2) l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices (terme à terme) et de la multiplication par un scalaire (terme à terme), est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Le neutre de l'addition est .....

3) l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ muni de la somme et la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
Le neutre de l'addition est .....

4) l'ensemble des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$ (on se restreint à suites et fonctions)

- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, muni des deux opérations ci-dessous est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  ⋆ loi d'addition interne : $(u_n) + (v_n)$ est la suite de terme général $u_n + v_n$;
  le neutre est ...
  ⋆ loi de multiplication externe : $\lambda(u_n)$ est la suite de terme général λu_n.

- L'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}^I$, muni des deux lois ci-dessous est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  ⋆ loi d'addition interne : $f + g$ est définie pour tout x de I par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
  le neutre est ...
  ⋆ loi de multiplication externe : $\lambda.f$ est définie pour tout x de I par $(\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x)$.

5) produit cartésien d'espaces vectoriels

Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on définit :
⋆ loi d'addition interne : $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$ (addition par composante) ;
le neutre est ...
⋆ loi de multiplication externe : $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ (multiplication de chaque composante).
Alors $E \times F$ muni de ces deux opérations est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve dans l'**exercice 1**.

Remarque : on peut étendre cette définition à n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1, E_2, \ldots, E_n$: $\prod_{k=1}^{n} E_k$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les opérations définies par composante.

II. Sous-espaces vectoriels

Définition d'une combinaison linéaire (rappel).

$(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Soient u et v deux vecteurs de E, et λ et μ deux scalaires.
  Alors le vecteur $\lambda u + \mu v$ est une ***combinaison linéaire*** de u et v.
- Soient n vecteurs de E : u_1, u_2, ... u_n et des scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.
  Alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ est une ***combinaison linéaire de la famille*** $(u_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

Exemples :

- Dans le plan $\mathbb{R}^2$, avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ les vecteurs de la base, alors $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$: $\vec{u} = \ldots \vec{\imath} + \ldots \vec{\jmath}$.
- On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 \times 3^n - 2e^n$. (u_n) est une combinaison linéaire des suites (3^n) et (e^n) :
- Dans l'espace des polynômes à coefficients réels, le polynôme $P = 3X + 5X^2$ est une combinaison linéaire de $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X + X^2$.

  En effet, $P = \ldots$

Définition d'un sous-espace vectoriel.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit F une partie de E.
On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
$\star$ F n'est pas vide ;
$\star$ F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire $\forall (u, v) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v \in F$.

Exemple : $(\mathbb{R}^+)^2$ ensemble des vecteurs à coordonnées positives, est une partie de $\mathbb{R}^2$, mais ce n'est pas un sous espace vectoriel, en effet :

Propriété.

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Conséquence : pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on cherche un espace vectoriel de référence qui le contient, et on montre qu'il est un sous-espace de cet espace connu.

1) sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs (u_k), noté .... est un sous-espace vectoriel de E.
On l'appelle ***sous-espace vectoriel engendré par la famille*** $(u_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$.

Remarque : $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p,\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}$.

Exemples :

- Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de l'espace, alors $\mathrm{Vect}(\vec{v}) = \{\lambda \vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, c'est une ***droite vectorielle***, de direction $\vec{v}$, c'est l'ensemble des vecteurs ....
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$,
  alors $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$,
  c'est un ***plan vectoriel***.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 est un espace vectoriel :
  par exemple dans le cas où l'équation caractéristique a deux solutions distinctes réelles r_1 et r_2, on rappelle que $\mathcal{S} = \{$..
  ....

2) caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Propriété.

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} 0_E \in F \\ \forall (u,v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u+\lambda v \in F \end{array}\right.$.

Exemples :

- on note E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors F défini par $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E :

- l'ensemble noté F des suites arithmétiques à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

3) Méthodes pour montrer qu'une partie F est un sous-espace vectoriel de E

1. ⋆ « Montrons que O_E est dans F : » …
⋆ « Soient u et v dans F, et λ dans $\mathbb{K}$, montrons que $u + \lambda v$ est dans F : » …

2. on écrit F sous forme de $\text{Vect}\,(u_k)$.

Exemple : montrer que le plan vectoriel F d'équation $2x + y - 3z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.