Espaces vectoriels
A - Généralités

La notion d'espace vectoriel naît petit à petit au cours du 19ème siècle, dans le but de formaliser l'espace qui nous entoure, mais ils permettent aussi de mieux visualiser des théories plus abstraites.

Dans un premier temps, le vecteur algébrique, en coordonnées, permet de résoudre des problèmes géométriques sans figures (dans le même état d'esprit, la géométrie descriptive de Gaspard Monge (1746 - 1818) contribue à évacuer la figure en transformant son mode de représentation, pour, disait-il, s'affranchir « de cette complication des figures dont l'usage distrait de l'attention qu'on doit au fond des idées »).

Ce sont Hermann Grassmann (1809-1877), puis Giuseppe Peano (1848-1932) qui formalisent les opérations sur les vecteurs, et permettent d'axiomatiser les espaces vectoriels.

Parallèlement, Arthur Cayley introduit les matrices, et les opérations sur les n-uplets, ouvrant la voie à des dimensions plus grandes que 3.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition.

Un $\mathbb{K}$-***espace vectoriel*** est un ensemble E non vide muni :

⋆ d'une loi d'addition entre ses éléments, notée + vérifiant :

- $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v \in E$ (loi ***interne***)
- $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v = v+u$ (la loi est ....
- $\forall (u,v,w) \in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$ (la loi est ....
- $\exists e \in E, \forall u \in E,\ u+e = u$ et $e+u = u$ (e est le neutre de l'addition, on le note en général 0_E)
- $\forall u \in E, \exists u' \in E,\ u+u' = e$ (u' est l'opposé de u, noté $-u$)

⋆ d'une loi de multiplication d'un élément de $\mathbb{K}$ par un élément de E, notée . vérifiant :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall u \in E,\ \lambda.u \in E$ (loi ***externe*** sur E)
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall u \in E,\ (\lambda\mu).u = \lambda(\mu u)$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall u \in E,\ (\lambda+\mu).u = \lambda.u + \mu.u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall (u,v) \in E^2,\ \lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$ (. est ***distributive*** par rapport à +)
- $\forall u \in E,\ 1.u = u$

Vocabulaire : les éléments de E sont appelés des ***vecteurs***, et les éléments de $\mathbb{K}$ des ***scalaires***.
On parle alors de ***vecteur nul*** pour le neutre de l'addition.
On écrit parfois $(E,+,.)$ pour désigner l'ensemble E et les deux opérations associées.

1) Espaces vectoriels de référence

a. les ensembles $\mathbb{K}^n$

- L'ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

  Les éléments sont définis par leurs coordonnées $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

  ⋆ loi d'addition interne : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$;

  le neutre est ...

  ⋆ loi de multiplication externe : $\lambda\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

  Quelques justifications :

- De même pour les vecteurs de l'espace : $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
- et on peut aussi étendre cette propriété à tous les ensembles $\mathbb{K}^n$:

$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des deux opérations :
⋆ loi d'addition interne : $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n)$;
le neutre est
⋆ loi de multiplication externe : $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

b. l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices (terme à terme) et de la multiplication par un scalaire (terme à terme), est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Le neutre de l'addition est .....

c. l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ muni de la somme et la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
Le neutre de l'addition est .....

d. l'ensemble des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$ (on se restreint à suites et fonctions)

- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, muni des deux opérations ci-dessous est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  ⋆ loi d'addition interne : $(u_n) + (v_n)$ est la suite de terme général $u_n + v_n$;
  le neutre est ...
  ⋆ loi de multiplication externe : $\lambda(u_n)$ est la suite de terme général λu_n.

- L'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}^I$, muni des deux lois ci-dessous est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  ⋆ loi d'addition interne : $f + g$ est définie pour tout x de I par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
  le neutre est ...
  ⋆ loi de multiplication externe : $\lambda.f$ est définie pour tout x de I par $(\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x)$.

e. produit cartésien d'espaces vectoriels

Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on définit :
⋆ loi d'addition interne : $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$ (addition par composante) ;
le neutre est ...
⋆ loi de multiplication externe : $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ (multiplication de chaque composante).
Alors $E \times F$ muni de ces deux opérations est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve dans l'**exercice 1**.

Remarque : on peut étendre cette définition à n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$: $\prod_{k=1}^{n} E_k$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les opérations définies par composante.

2) Sous-espaces vectoriels

Définition d'une combinaison linéaire (rappel).

$(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Soient u et v deux vecteurs de E, et λ et μ deux scalaires.
  Alors le vecteur $\lambda u + \mu v$ est une ***combinaison linéaire*** de u et v.
- Soient n vecteurs de E : u_1, u_2, ... u_n et des scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ \lambda_n$.
  Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ est une ***combinaison linéaire de la famille*** $(u_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

Exemples :

- Dans le plan $\mathbb{R}^2$, avec $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ les vecteurs de la base, alors $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$: $\overrightarrow{u} = \ldots \overrightarrow{i} + \ldots \overrightarrow{j}$.
- On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 \times 3^n - 2e^n$. (u_n) est une combinaison linéaire des suites (3^n) et (e^n) :
- Dans l'espace des polynômes à coefficients réels, le polynôme $P = 3X + 5X^2$ est une combinaison linéaire de $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X + X^2$.

  En effet, $P = \ldots$

Définition d'un sous-espace vectoriel.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit F une partie de E.
On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- ⋆ F n'est pas vide ;
- ⋆ F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire $\forall (u, v) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v \in F$.

Exemple : $(\mathbb{R}^+)^2$ ensemble des vecteurs à coordonnées positives, est une partie de $\mathbb{R}^2$, mais ce n'est pas un sous espace vectoriel, en effet :

Propriété.

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Conséquence : pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on cherche un espace vectoriel de référence qui le contient, et on montre qu'il est un sous-espace de cet espace connu :

Propriété.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u + \lambda v \in F \end{cases}$.

Exemples :

- on note E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors F défini par $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E :

- dans l'espace $\mathbb{R}^3$, le plan vectoriel F d'équation $2x+y-3z=0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- l'ensemble noté F des suites arithmétiques à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

Méthode pour montrer qu'une partie F est un sous-espace vectoriel de E :
⋆ « Montrons que O_E est dans F : » ...
⋆ « Soient u et v dans F, et λ dans $\mathbb{K}$, montrons que $u+\lambda v$ est dans F : » ...

II. Familles de vecteurs

1) Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, familles génératrices

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle ***sous-espace vectoriel engendré par la famille*** $(u_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs (u_k). On le note ....

Ainsi, ...

Exemples :

- Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de l'espace, alors $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}) = \{\lambda\overrightarrow{v},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$, c'est une ***droite vectorielle***, de direction $\overrightarrow{v}$, c'est l'ensemble des vecteurs ....

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$,
alors $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$,
c'est un ***plan vectoriel***.

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 est un espace vectoriel :
par exemple dans le cas où l'équation caractéristique a deux solutions distinctes réelles r_1 et r_2, on rappelle que $\mathcal{S} = \{$...
....
....

Définition.

Une famille de vecteurs de E, notés $u_1, u_2, \dots, u_p$, est dite ***génératrice*** de E si ....

....

Autrement dit, tout vecteur v de E ....

....

Exemples :

- proposer une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en justifiant :

- montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 3x + 2y - z - 2t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice :

- montrer que la famille $(X + 1, X + 2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$:

Méthodes :

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice d'un espace vectoriel E :
  - ⋆ « Soit v dans E, montrons qu'il existe λ_1, λ_2, $\dots \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut aussi déterminer le rang de la matrice formée des vecteurs en colonne : si le rang est n, alors la famille est génératrice de $\mathbb{R}^n$.
- Pour montrer que la famille n'est pas génératrice :
  - ⋆ On trouve un vecteur v qui ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_p$: « on pose $v = \dots$, montrons qu'il n'existe pas de λ_1, λ_2, $\dots \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut aussi déterminer le rang de la matrice formée des vecteurs en colonne : si le rang n'est pas n, alors la famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Propriété.

Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice du même espace vectoriel.

Traduction : si (u, v, w) est une famille génératrice de E, alors pour tout vecteur x, (u, v, w, x) est aussi génératrice de E.

2) Familles libres, liées

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est ***libre*** si ....

  ....

  Autrement dit : ....
- Une famille qui n'est pas libre est ***liée***, autrement dit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée si ....

  ....

  Autrement dit : ....

Exemples et cas particuliers :

- Deux vecteurs forment une famille liée si et seulement si ....
- Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs forment une famille liée signifie ....
- Toute famille de polynômes non nuls et de degrés échelonnés (tous différents) est libre.

  Par exemple : $P_1 = 2 + X$, $P_2 = -5X + 3X^2$ et $P_3 = 1 + 3X + X^3$: ....

  ....
- Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, cos et sin forment une famille libre :

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....
- Dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ forment-elles une famille libre ?

  ....

Propriété.

- Une famille contenue dans une famille libre est libre.
- Une famille contenant une famille liée est liée.
- Une famille contenant le vecteur nulle est liée.
- Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.

Traduction des deux premiers points :

- si (u, v, w, x, z) est une famille libre, alors, entre autres, (u, v, x, z) est libre ...
- si u et v forment une famille liée, alors quel que soit w, la famille (u, v, w) sera liée.

Méthodes :

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre :
  - ⋆ « Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0$.
    Montrons qu'alors, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$ »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut déterminer le rang de la matrice formée des vecteurs en colonne : si ce rang est p, alors la famille est libre.
- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée :
  - ⋆ Trouver explicitement des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$, dont au moins n'est pas nul, et tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_E$.
    « On pose $\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = \ldots, \ldots, \lambda_p = \ldots$: ils ne sont pas tous nuls et $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_E$. (*à justifier*)
    Donc la famille est liée. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut déterminer le rang de la matrice formée des vecteurs en colonne : si ce rang n'est pas p, alors la famille est liée.

3) Bases

Définition.

Une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Propriété: caractérisation des bases.

Soit $(e_k)_{k\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(e_k)_{k\in[\![1;p]\!]}$ est une base de E ;

(ii) tout vecteur v de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

. . . .

Remarque : l'existence de la combinaison linéaire résulte du fait que la famille est génératrice, et l'unicité du fait que la famille est libre.

Vocabulaire et notations : si l'on note $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ une base, alors, dans la décomposition $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ les nombres λ_k sont appelés les ***coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$***.

On note parfois $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v})$ la matrice colonne de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathcal{B}$: $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Méthodes : pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel E :

- ⋆ on peut montrer que c'est une famille libre et génératrice de E ;
- ⋆ on peut montrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille, cela nous donne en même temps les coordonnées.

Exemples à retenir :

- la base ***canonique*** du plan $\mathbb{R}^2$ est $\overrightarrow{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  exemple avec $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

- de même, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est formée de $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ … et $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

- dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la base canonique est formée des $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et la colonne j qui vaut 1.
  Pour $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, la base canonique est

  exemple avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

  les coordonnées de M dans la base canonique sont
- la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est formée des $n+1$ polynômes $1, X, X^2, \dots, X^n$.
  exemple avec $P = 1 + 3X + 7X^2$

Méthodes

Que faire avec une égalité du type $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$?

⋆ dans un espace de type $\mathbb{K}^n$: cette égalité se traduit en un système à n équations (une équation par coordonnée);

⋆ dans un espace de matrices $\mathcal{M}_{n,m}$: même chose, avec $n \times m$ équations (une équation par « position » dans la matrice) ;

⋆ dans un espace de fonctions définies sur I, elle se traduit par autant d'équations que de x dans I :
$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p \iff \forall x \in I,\ v(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \ldots + \lambda_p u_p(x)$$
pour trouver des relations sur les λ_k, on peut choisir les valeurs de x qui nous arrangent (ou éventuellement dériver les fonctions, regarder leurs limites ...)
mais attention l'égalité de départ ne sera vraie que si la relation est vraie pour TOUS les x.

⋆ dans un espace de suites : idem, une équation par valeur d'indice.

⋆ dans un espace de polynômes : on écrit les deux côtés sous forme développée, et on peut identifier les coefficients des X^k, par exemple avec $P = X^3 + 2X^2 - X + 3$, $P_1 = X^2 - 2X - 4$ et $P_2 = 2X^3 - 5X^2 + 1$:
$$P = \lambda P_1 + \mu P_2 \iff X^3 + 2X^2 - X + 3 = 2\mu X^3 + (\lambda - 5\mu)X^2 - 2\lambda X + (-4\lambda + \mu) \iff \begin{cases} 1 = 2\mu \\ 2 = \lambda - 5\mu \\ -1 = -2\lambda \\ 3 = -4\lambda + \mu \end{cases}$$
OU on peut aussi faire comme avec les fonctions et prendre des valeurs !

Comment montrer qu'une partie A est un sous-espace vectoriel de E ?

⋆

⋆