# Nombres réels.

### Exercice 1.

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

### ☞ Exercice 2.

Les parties suivantes sont-elles majorées ? minorées ? bornées ?
$A = \{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\,,\ (m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2\}$
$B = \{\sin(x) + 2\cos(y) + 1\,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
$C = \{5\sin(x) - e^y + 3\,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

### ☞ Exercice 3.

Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer, lorsqu'elles existent, les bornes supérieures et inférieures, et préciser s'il s'agit d'un maximum ou minimum :
$A = \{1 + n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$
$C = \{|xy|\,,\ x \in [-1,1],\ y \in [2,3[\}$
$B = \{(-1)^n + \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$
$D = \{|x + 3y|\,,\ x \in [6;7], y \in [-3;-2]\}$

### Exercice 4.

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est borné, et donner les valeurs de $\inf(A)$ et $\sup(A)$, préciser si $A$ a un minimum, un maximum.
**1.** $A = \{\arctan(x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ **2.** $A = \left\{e^{-x^2+4},\ x \in \mathbb{R}\right\}$

### Exercise 5.

Let $A$ be a non empty subset of $\mathbb{R}$ with an upper bound, and whose least upper bound is strictly positive.
Prove that $A$ contains a strictly positive number.
(*We can employ proof by contradiction.*)

### ★ Exercice 6.

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{x^2+n^2} \end{array}$.
Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, étudier l'ensemble $\{f_n(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\}$. A-t-il une borne supérieure ? un maximum ? une borne inférieure ? un minimum ?

### Exercice 7.

Soit $f : x \mapsto 2\,|2x - 1| + |x + 2| + 3x$.

**1.** Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue, suivant les valeurs de $x$.

**2.** Tracer la courbe représentative de $f$.

**3.** Résoudre l'équation $f(x) = x + 5$.

### Exercice 8.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (k,\theta) \in \mathbb{Z} \times [0, 2\pi[,\ x = 2k\pi + \theta$.

### ★ Exercice 9.

Soit $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ ?

### Exercice 10.

Soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que : **(a)** $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ ★ **(b)** $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \right\rfloor$