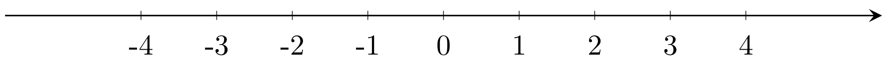
Nombres réels.

Jusqu'à la fin du 19ième siècle, les mathématiciens avaient une vision intuitive des nombres réels et de leurs propriétés. Le développement de l'analyse (limites, continuité ...) a nécessité une construction plus rigoureuse de l'ensemble des réels : Cantor et Dedekin entre autres ont proposé des constructions précises.

I. Ordre dans $\mathbb{R}$

1) Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels se représente sur une droite graduée et orientée, appelée ***droite réelle***.



Sur $\mathbb{R}$, il existe un ordre qui permet de comparer deux nombres réels, c'est-à-dire savoir lequel est supérieur ou égal à l'autre.
Cet ordre se traduit par l'orientation de la droite, mais aussi par la relation suivante : $\boxed{x \leqslant y \Longleftrightarrow x - y \leqslant 0}$.
Il s'agit d'une ***relation d'ordre***, qui est :

- réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$
- antisymétrique : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Longleftrightarrow x = y$
- transitive : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \Big(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z\Big) \Longrightarrow x \leqslant z$

Rappels : inégalités et opérations.

- addition d'un même terme : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, ...
- addition d'inégalités : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ ....
- multiplication par un même nombre : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, ...

  $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-^*$, ...
- inverse : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < x \leqslant y \Longleftrightarrow$ ....

  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leqslant y < 0 \Longleftrightarrow$ ....

2) Rappels sur les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition.

Soient a et b deux nombres réels (avec $a < b$), on note :

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ c'est un ***segment*** $\quad$ $[a,b[= \{$ .... intervalle ***semi-ouvert***

$]a,b[= \{$ .... (intervalle ***ouvert***) $\quad$ $]a,b] = \{$ ....

$[a,+\infty[= \{$ .... (intervalle ....) $\quad$ $]-\infty,b] = \{$ .... (intervalle ....)

$]a,+\infty[= \{$ .... (intervalle ....) $\quad$ $]-\infty,b[= \{$ .... (intervalle ....)

$]-\infty,+\infty[$ (soit $\mathbb{R}$) et $]a,a[$ (soit $\emptyset$) sont des ***intervalles fermés et ouverts*** de $\mathbb{R}$.

Propriété. Caractérisation des intervalles.

Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$.
I est un intervalle si et seulement si pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, alors $[a,b] \subset I$.

Cela signifie qu'un intervalle est « en un seul morceau », « sans trou ».

3) Majorant, minorant, maximum, minimum

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que M est un ***majorant*** de A si ....

On dit que m est un ***minorant*** de A si ....

Une partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un majorant (respectivement minorant) est dite ***majorée*** (respectivement ***minorée***) : ....

Une partie majorée et minorée est ....

Propriété.

Une partie A de $\mathbb{R}$ est .... si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leqslant M$.

Exemples : $A = [-2; 4[$ est bornée. Voici des majorants : ....

et des minorants : ....

Un majorant qui appartient à l'ensemble est un maximum. Autrement dit :

Définitions.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'il existe, on appelle ***maximum***, et on note $\max(A)$, le réel a de A tel que $\forall x \in A, x \leqslant a$.
- Lorsqu'il existe, on appelle ***minimum***, et note $\min(A)$, ...

Remarque : un maximum peut aussi être appelé ***plus grand élément***, et un minimum un ***plus petit élément***.

Exemple : $A = [-2; 4[$: A a-t-elle un maximum ? un minimum ?

4) Borne supérieure, borne inférieure

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée et que l'ensemble des majorants admet un minimum S, alors on dit que S est la ***borne supérieure*** de A et on le note $S = \sup(A)$.
- Si A est minorée et que l'ensemble des minorants admet un maximum s, alors on dit que s est la ***borne inférieure*** de A et on le note $s = \inf(A)$.

Autrement dit, $\sup(A)$ est le plus petit des majorants (le meilleur, le plus précis), et $\inf(A)$ est le plus grand des minorants, ce qui donne une autre caractérisation :

S est la borne supérieure si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant S \\ \forall S' < S,\ \exists x \in A, x > S' \end{cases}$$

s est la borne inférieure si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in A, \\ \forall s' \ldots\ldots \end{cases}$$

Remarque : si un ensemble admet un plus grand élément, alors il a une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$. Idem pour plus petit élément et borne inférieure.

Exemple : $A = [-2; 4[$: A a-t-elle une borne supérieure ? une borne inférieure ?

Propriété de la borne supérieure.

> ....
>
> ....

Remarque : tous les ensembles de nombres ne possèdent pas cette propriété de la borne supérieure.
Par exemple, $\mathbb{Q}$ ne possède pas cette propriété : $A = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \leqslant 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

5) Exemples

Pour chacun des ensembles suivants, donner, lorsqu'ils existent, majorants, maximum, borne supérieure, minorants, minimum et borne inférieure.

	majorants	maximum	borne supérieure	minorants	minimum	borne inférieure
$]-5,-1]$						
$[2,5]$						
$]-\infty,5[$						
$\mathbb{N}$						
$[\![3,8[\![$						
$\left\{\frac{1}{x},\ x \in]0,5[\right\}$						

II. Valeur absolue et partie entière

1) Rappels et complément sur la valeur absolue

Définition.

> Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la ***valeur absolue*** de x par $|x| =$
>
> On définit la ***distance*** entre deux réels x et y par $d(x,y) = |x-y|$.

Exemples : $d(3,5) =$ .... $d(5,3) =$ ....

En fait, $d(x,y) = \begin{cases} & \text{si} \\ & \text{si} \end{cases}$

Propriété.

> Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $|xy| =$ .... et, pour $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| =$ ......
>
> Et l'***inégalité triangulaire*** est vraie : $\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$.
>
> Et $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x-y|$.

Justification de la dernière inégalité :

Propriété.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$: $|x-a| < \varepsilon \iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \iff x \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

Interprétation : $|x-a| < \varepsilon$ signifie que ....

2) Partie entière

Propriété.

Soit x dans $\mathbb{R}$.
Il existe un unique nombre entier, noté $\lfloor x \rfloor$ tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Cet entier est appelé ***partie entière*** de x.

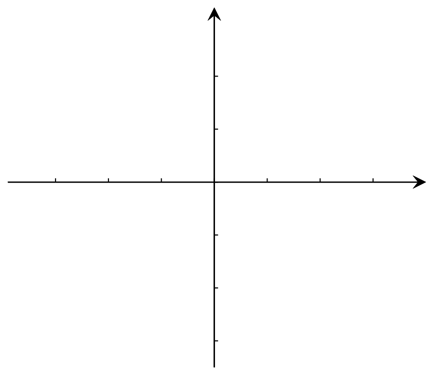
Conséquence : $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

Exemples : encadrer les nombres suivants entre deux entiers consécutifs, et en déduire leurs parties entières :

$\ldots \leqslant 3,7 < \ldots$; $\ldots \leqslant -2,1 < \ldots$; $\ldots \leqslant \pi < \ldots$; $\ldots \leqslant 3 < \ldots$; $\ldots \leqslant \frac{7}{3} < \ldots$; $\ldots \leqslant -e+1 < \ldots$

$\lfloor 3,7 \rfloor = \ldots$ $\lfloor -2,1 \rfloor = \ldots$ $\lfloor \pi \rfloor = \ldots$ $\lfloor 3 \rfloor = \ldots$ $\lfloor \frac{7}{3} \rfloor = \ldots$ $\lfloor -e+1 \rfloor = \ldots$

Remarque : la partie entière est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Voici sa représentation graphique :



En Python, la partie entière s'obtient par la commande `floor( )` qui se trouve dans la bibliothèque `math`.

Exercice :

1. Démontrer que pour tout réel x, $\lfloor x-2 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 2$.

2. Démontrer que pour tout réel x et tout entier relatif k, $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.