Équations différentielles.

Les équations différentielles se sont posées dès le début de l'analyse, trouvant leur origine dans des problèmes de géométrie ou de mécanique. Les fonctions déjà connues ont vite montré leurs limites pour la résolution de ces équations. Newton, Leibniz, Huygens, Bernoulli, puis Euler, Clairaut, Lagrange ... ont contribué à élaborer des méthodes de résolution d'équations différentielles de plus en plus complexes, notamment en formalisant la fonction exponentielle. Toutefois, on ne sait résoudre de manière exacte que très peu d'équations différentielles. En pratique, pour beaucoup d'équations différentielles, on utilise des méthodes numériques pour déterminer des solutions approchées satisfaisant le problème physique (voir méthode d'Euler en informatique).

I. Résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre $y' + ay = b(x)$

Définition.

On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant*** toute équation de la forme :

$$(\mathcal{E}) \ : \ y' + ay = b(x)$$

où :
- ⋆ l'inconnue y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$;
- ⋆ a est un nombre réel ou complexe ;
- ⋆ b est une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue sur $\mathbb{R}$.

f est une solution de $(\mathcal{E})$ signifie que $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + af(x) = b(x). \end{cases}$

Exemple : vérifier que la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{i}{5}x + \frac{1}{25} \end{array}$ est solution de l'équation : $(\mathcal{E}) \ : \ y' - 5iy = x$.

Remarque : on peut trouver des équations du type $ay' + by = c(x)$, mais si $a \neq 0$, l'équation est équivalente à $y' + \frac{b}{a}y = \frac{c(x)}{a}$ et on se ramène donc à l'équation de référence.

Problème de Cauchy : on appelle ***problème de Cauchy*** la donnée d'une équation différentielle avec condition(s) initiale(s).

Au premier ordre, il peut s'écrire $\begin{cases} y' + ay = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Théorème.

Soient x_0 dans $\mathbb{R}$ et y_0 dans $\mathbb{C}$, alors toute équation différentielle de la forme $y' + ay = b(x)$ aura une solution unique vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

1) Cas particulier : second membre constant

Si $a \neq 0$, les solutions de l'équation $y' + ay = b$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-ax} + \frac{b}{a}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$ selon le contexte).

Ces fonctions sont bien des solutions, en effet,

Exemple : résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 3y = 5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

2) Cas général : trois étapes

a. Solutions de l'équation homogène

L'équation homogène est une équation différentielle associée à l'équation de départ, en mettant 0 à la place du second membre.
Pour une équation du premier ordre, cela donne : $\boxed{(\mathcal{H}) : y' + ay = 0}$.

Théorème.
Les solutions réelles de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = \lambda e^{-ax}$, avec λ une constante.
Autrement dit, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto \lambda e^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Remarque : les solutions ci-dessus sont celles qui prennent des valeurs réelles. Selon le contexte, on peut être amené à chercher les solutions à valeurs complexes, alors λ décrit $\mathbb{C}$.

Exemple : les solutions réelles de l'équation $y' - 5y = 0$ sont

b. Solutions particulières

Une solution particulière d'une équation différentielle est une des solutions de l'équation.
Pour en trouver une, on regarde la forme du second membre $b(x)$. Seulement deux (trois) formes sont au programme.

second membre de la forme $b(x) = Ae^{\omega x}$

1er cas : $\omega \neq -a$.
On cherche une solution sous forme $y_p(x) = me^{\omega x}$ (*on cherche* m).

2ème cas : $\omega = -a$.
On cherche une solution sous forme $y_p(x) = mxe^{\omega x}$ (*on cherche* m).

Exemples :
- $y' - 5y = 3e^{2x}$

- $y' - 5y = 3e^{5x}$

second membre de la forme $b(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
On cherche une solution sous forme $y_p(x) = m_1\cos(\omega x) + m_2\sin(\omega x)$ (*on cherche* m_1 et m_2).

Exemple : trouver une solution de $y' - 5y = 7\cos(2x)$.

second membre constant $b(x) = C$
La solution est $y_p(x) = \frac{C}{a}$

Exemple : une solution de $y' - 5y = 11$ est

principe de superposition
Si y_{p_1} et y_{p_2} sont des solutions particulières des équations respectives $y' + ay = b_1(x)$ et $y' + ay = b_2(x)$, alors $y_{p_1} + y_{p_2}$ est une solution de $y' + ay = b_1(x) + b_2(x)$.
Idem avec encore plus de termes dans le second membre.

Exemple : une solution de $y' - 5y = 3e^{2x} + 3e^{5x} + 11$ est

c. Solution générale

Théorème.
Les solutions d'une équation différentielle sont les fonctions obtenues par somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
Autrement dit, pour l'équation $y' + ay = b(x)$,

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-ax} + y_p(x),\ \lambda \in \mathbb{C}\} \text{ avec } y_p \text{ une solution particulière}$$

Exemple : l'ensemble des solutions de l'équation $y' - 5y = 3e^{2x} + 3e^{5x} + 11$ est

3) Exemple complet

Résoudre le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' + 4y = 2e^{-4t} + 1 \\ y(0) = -1 \end{array}\right.$

II. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition.

On appelle ***équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*** toute équation de la forme

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad y'' + ay' + by = \varphi(x)$$

où :

⋆ l'inconnue y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$;

⋆ a et b sont des nombres réels ;

⋆ φ est une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue sur $\mathbb{R}$.

f est une solution de cette équation signifie que $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = \varphi(x). \end{array}\right.$

Remarque : on peut trouver des équations du type $ay'' + by' + cy = \varphi(x)$, mais si $a \neq 0$, l'équation est équivalente à $y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = \frac{\varphi(x)}{a}$ et on se ramène donc à l'équation de référence.

Problème de Cauchy : le ***problème de Cauchy*** au second ordre peut s'écrire $\begin{cases} y''+ay'+by=\varphi(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0 \end{cases}$.

Théorème.

Soient x_0 dans $\mathbb{R}$ et y_0 et y'_0 dans $\mathbb{C}$, alors toute équation différentielle de la forme $y''+ay'+by=\varphi(x)$ aura une solution unique vérifiant les conditions initiales $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y'_0$.

1) Cas particuliers

Avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque l'on cherche les solutions à valeurs réelles :
les solutions de l'équation $y''+\omega^2 y=0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$;
les solutions de l'équation $y''-\omega^2 y=0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\omega x}+\mu e^{-\omega x}$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.

Exemple : résoudre l'équation $y''+4y=0$ en cherchant les solutions à valeurs réelles.

2) Cas général : trois étapes

a. Solutions de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $\boxed{(\mathcal{H}) : y''+ay'+by=0}$.

Première approche : on recherche des solutions sous forme $f(x)=e^{rx}$.

Alors $f'(x)=$ .... et $f''(x)=$ ....

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x)+af'(x)+bf(x)=0 \iff$ ....

Ainsi, la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si r est solution de l'équation $r^2+ar+b=0$.

Définition.

On appelle ***équation caractéristique*** de $(\mathcal{E})$ l'équation $r^2+ar+b=0$.

Rappel : pour un polynôme du second degré ax^2+bx+c à coefficients réels, si $\Delta<0$ les racines sont complexes conjuguées : $\frac{-b-i\delta}{2a}$ et $\frac{-b+i\delta}{2a}$ où $\delta^2=-\Delta$

Méthode :

1. écrire l'équation caractéristique ;

2. calculer Δ ;

3. utiliser l'un des deux théorèmes ci-dessous pour conclure
(le choix du théorème se fait en fonction du contexte : solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?).

Théorème: solutions complexes de l'équation homogène.

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de $(\mathcal{E})$.

- Si $\Delta \neq 0$, on note r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique, alors les solutions de $(\mathcal{H})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=\lambda e^{r_1 x}+\mu e^{r_2 x}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.
  Autrement dit, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\left\{x \mapsto \lambda e^{r_1 x}+\mu e^{r_2 x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$.
- Si $\Delta=0$, on note r_0 l'unique solution de l'équation caractéristique, alors les solutions de $(\mathcal{H})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=\lambda e^{r_0 x}+\mu.x.e^{r_0 x}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.
  Autrement dit, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\left\{x \mapsto \lambda e^{r_0 x}+\mu.x.e^{r_0 x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$

Exemple : déterminons les solutions à valeurs complexes de $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Théorème: solutions réelles de l'équation homogène.

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de $(\mathcal{E})$.

- Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique, alors les solutions de $(\mathcal{H})$ à valeurs réelles sont les fonctions de la forme $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Autrement dit, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Si $\Delta = 0$, on note r_0 la solution de l'équation caractéristique, alors les solutions de $(\mathcal{H})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{r_0 x} + \mu.x.e^{r_0 x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Autrement dit, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto \lambda e^{r_0 x} + \mu.x.e^{r_0 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Si $\Delta < 0$, on note $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les solutions de l'équation caractéristique, alors les solutions réelles de $(\mathcal{H})$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
  $y(x) = e^{\alpha x}\Big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\Big)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Autrement dit, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exemple : déterminons les solutions à valeurs réelles de $y'' + 4y' + 13y = 0$.

b. Solutions particulières

Le **principe de superposition** est toujours valable.

second membre de la forme $Ae^{\omega x}$

1er cas : ω n'est pas racine de l'équation caractéristique
On cherche une solution sous forme $y_p(x) = me^{\omega x}$ (*on cherche* m).

2ème cas : ω est racine simple de l'équation caractéristique.
On cherche une solution sous forme $y_p(x) = mxe^{\omega x}$ (*on cherche* m).

3ème cas : ω est racine double de l'équation caractéristique.
On cherche une solution sous forme $mx^2e^{\omega x}$ (*on cherche* m).

Exemple : trouver une solution particulière de $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$

second membre de la forme $A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$.

1er cas : $i\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
On cherche une solution sous forme $y_p(x)=m_1\cos(\omega x)+m_2\sin(\omega x)$ (*on cherche* m_1 et m_2).

2ème cas : $i\omega$ est solution de l'équation caractéristique.
On cherche une solution sous forme $y_p(x)=m_1x\cos(\omega x)+m_2x\sin(\omega x)$ (*on cherche* m_1 et m_2).

Exemple : trouver une solution particulière de $y''-5y'+6y=2\cos(x)+3\sin(x)$.

second membre constant $\varphi(x)=C$
La solution est $y_p(x)=\frac{C}{b}$

c. Solution générale

Théorème.
Les solutions d'une équation différentielle sont les fonctions obtenues par somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

3) Exemple complet

Résoudre le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y'' - 6y' + 9y = 8e^{3x} + 5 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \end{array}\right.$