Équations différentielles.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

★ Exercice 1.

1. Dans cette question, on cherche à démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) : $y' + ay = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

- **(a)** Montrer que $f : x \mapsto \lambda e^{-ax}$ est une solution de (E_1).
- **(b)** Soit f une solution de (E_1), montrer que $g : x \mapsto f(x) \times e^{ax}$ est une fonction constante. En déduire la forme de f.
- **(c)** Conclure.

2. Ici, on cherche à démontrer que l'ensemble des solutions de (E_2) : $y' + ay = b(x)$ est $\{x \mapsto y_{\mathcal{H}} + y_p,\ y_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$ où y_p est une solution particulière et $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

- **(a)** Soit $y_{\mathcal{H}}$ une solution de l'équation homogène, montrer que $y = y_{\mathcal{H}} + y_p$ est une solution de l'équation (E_2).
- **(b)** Soit y une solution de l'équation (E_2), montrer que la fonction $z = y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée à (E_2).
- **(c)** Conclure.

Exercice 2.

f est-elle solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$?

1. $f(x) = 3xe^{-x}$ et $(\mathcal{E}) : y' + 2y = 3(x+1)e^{-x}$

2. $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $(\mathcal{E}) : y' + \frac{2}{3}y = \frac{7}{6}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

3. $f(x) = 2x$ et $(\mathcal{E}) : y' + \frac{1}{x}y = 4$ (sur $\mathbb{R}^*$)

Exercise 3.

In each case, can we find some coefficients a and b in such a way that f is a solution to the equation $(\mathcal{E})$? If so, find them.

1. $(\mathcal{E}) : y' + 6y = -3x + 1$ et $f : x \mapsto ax + b$.

2. $(\mathcal{E}) : y' + 6y = (5x-3)e^{-x}$ et $f : x \mapsto (ax+b)e^{-x}$.

3. $(\mathcal{E}) : y' + 6y = (2x-1)e^{-6x}$ et $f : x \mapsto (ax+b)e^{-6x}$.

☞ Exercice 4.

Résoudre les équations différentielles suivantes (on cherche les solutions parmi les fonctions à valeurs complexes).

1. $y' + 7y = 2 + 3\cos(2x)$

2. $u' - \frac{1}{2}u = 3e^{-2it}$

3. $z' + 3z = 2e^{-3t} + 4$

4. $z' = 2\cos(t)$

5. $v' + 2v = 3$

6. $2x' - 3x = 4\sin(2t) + e^{\frac{3}{2}t}$

Exercice 5.

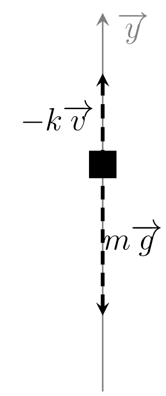
Une bobine est soumise à une tension constante U. On s'intéresse à l'intensité i du courant qui la traverse.
En notant L l'inductance de la bobine et R sa résistance, toutes deux supposées non nulles, on peut montrer que i est solution de l'équation $Ly' + Ry = U$.

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que l'intensité à l'instant initial est 0.

2. Avec $R = 10\Omega$, $L = 0,1H$ et $U = 12V$, déterminer l'intensité d'équilibre de la bobine.

Exercice 6.

Un corps est lâché en chute libre dans l'air, sans vitesse initiale. Les forces s'exerçant sur le corps sont :
⋆ le poids : masse × $\overrightarrow{g}$
⋆ le frottement, proportionnel à la vitesse : $-k\overrightarrow{v}$ ($k > 0$)



1. Écrire le problème de Cauchy vérifié par la fonction v, et le résoudre.

2. Déterminer la limite de v lorsque t tend vers $+\infty$.

3. On peut montrer que, pour une densité donnée, le rapport $\frac{k}{m}$ est inversement proportionnel à la taille de l'objet.
Qui tombe le plus vite : un copeau de bois ou une bûche du même bois ?

Exercice 7.

On considère l'équation $(\mathcal{E})\ :\ y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Déterminer une fonction u telle que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{u(x)}{e^x}$ soit une solution de $(\mathcal{E})$.

2. En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$.

☞ Exercice 8.

Résoudre les équations suivantes en recherchant les solutions dans les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, puis les dans les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) $4y'' + 4y' + y = 0$ **(b)** $y'' - 3y' = 0$ **(c)** $y'' - 2y' + 5y = 0$

☞ Exercice 9.

Résoudre les équations différentielles suivantes (déterminer les solutions à valeurs complexes puis à valeurs réelles).

(a) $y'' - 2y' + 5y = 2e^{2x} + \cos(3x)$ **(c)** $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

(b) $y'' + 2y' + y = e^{3x}$ **(d)** $y'' - 4y = e^{2x}$

Exercice 10.

On attache un mobile M à l'une des extrémités d'un ressort, l'autre extrémité étant fixe. On compresse le ressort, puis on lâche.
Dans un repère $(O, \vec{\imath})$, l'abscisse x du mobile M varie en fonction du temps t et vérifie l'équation suivante :

$$(\mathcal{E})\ :\ x'' + 9x = 8\sin(t)$$

À $t = 0$, le mobile est à une distance ℓ de l'origine du repère, et on le lâche à vitesse nulle.
Exprimer x en fonction de t.