Ensemble $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence

☞ Exercice 1.

Pour chacune des propositions $\mathcal{P}(n)$ ci-dessous, écrire $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$.

(a) $\mathcal{P}(n) : u_n \geqslant 3$ **(b)** $\mathcal{P}(n) : u_n = 3n^2 - 7n + 4$ **(c)** $\mathcal{P}(n) : u_n \geqslant u_{n+1}$

(d) *(pas de $\mathcal{P}(0)$ ici)* $\mathcal{P}(n) : \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell = e^{n^2} - n(n-1)$ **(e)** $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} = 3(u_n - 1) + n$

Exercice 2.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$.
On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n = 2^{n+1} + 1$.
Écrire $\mathcal{P}(0)$ et la démontrer.

2. On note (v_n) la suite définie par $v_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 4$.
On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $v_n = 6n + 7$.
Démontrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
$\mathcal{P}(1)$ est-elle vraie ?

3. Let $\mathcal{P}(n)$ be the statement $2^n > n + 3$.
Prove that $\mathcal{P}(2)$ is false and $\mathcal{P}(3)$ is true.

Exercice 3.

☞ **1.** Soit (u_n) la suite définie par $u_3 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $u_n \leqslant 6$.

☞ **2.** Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}$:

(a) montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{5}{3}(\frac{1}{2})^n - \frac{2}{3}$;

(b) montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -\frac{3}{4}$.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 + v_n}$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

4. Soit $x > -1$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

5. Montrer que $\forall a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
(on utilisera uniquement la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ valable pour tous a et b de $]0, +\infty[$)

6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = -5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$.

7. Démontrer qu'à partir d'un certain rang à déterminer, $100n \leqslant 2^n$.

8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.
Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et u_{n+1}, puis montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2 + 3n$.

★ **9.** Soit x dans $\mathbb{R}$, quelconque.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_1 = 2\cos(x)$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\cos(x)u_{n+1} - u_n$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\cos(nx)$.