Ensemble $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence.

Le nombre entier est d'abord vu comme un cardinal, il permet de compter le nombre d'éléments d'une collection. L'arithmétique est l'étude des nombres entiers et leurs relations (additions, multiplications, divisibilité ...), elle est étudiée dès l'antiquité grecque. Euclide y consacre plusieurs livres de son traité Éléments. Par la suite, c'est Peano (1858-1932) et Dedekin (1831-1916) qui poseront les axiomes permettant une construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Cette formalisation de l'ensemble $\mathbb{N}$ et la théorie des ensembles permettent de confirmer la validité du raisonnement par récurrence, dont des ébauches sont utilisées depuis longtemps. La première trace d'un raisonnement explicite remonte au XVII$^{\text{è}}$ siècle par Pascal (1623-1662).

I. Propriétés de $\mathbb{N}$

Définition.

Soit E un ensemble ordonné, et A une partie de E.
On appelle ***plus grand élément*** de A, un élément $M \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \leqslant M$ (autrement dit M est un majorant de A qui appartient à A).
On appelle ***plus petit élément*** de A, ...

....

Propriété.

Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide a un plus petit élément, qui est unique.
Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée a un plus grand élément, qui est unique.

Exemples :

$A = \{4; 11; 3; 144; 895\}$: ...... et ...... sont des majorants de A, ...est le plus grand élément.

$B =]\!]17; +\infty[\![$: ...... et ...... sont des minorants de B, ... est le plus petit élément, ...
....

II. La récurrence simple

1) Première approche

Une démonstration par récurrence permet de montrer qu'une proposition (formule, inégalité ...) qui dépend d'un paramètre entier n est vraie quelque soit n, par exemple :

(a) La suite (u_n) étant définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1}$, on peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

(d) Pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout z de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $|z^n| = |z|^n$.

Imaginons une ola dans une salle de classe ☺: quels sont les éléments qui font qu'elle se forme et se propage ?

Analogie avec la suite (u_n) de l'exemple **(a)** :

2) La théorie

Propriété: principe de récurrence simple.

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n.

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall k \in \mathbb{N},\, \mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1) \end{cases}$ alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les n de $\mathbb{N}$.

Remarque : $\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$ signifie: si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi.
Lorsque ce point est vérifié, on dit que la proposition $\mathcal{P}$ est ***héréditaire*** (elle se transmet d'un rang au suivant), ce qui ne veut pas dire que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Pour démontrer qu'une proposition est héréditaire, il faut donc supposer (temporairement) que pour un rang k donné, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, on peut alors utiliser cette propriété pour montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Cette supposition est appelée ***hypothèse de récurrence***.

3) La pratique

Un raisonnement par récurrence se fait en quatre étapes.

- *Étape 1 : on identifie la proposition à démontrer.*
  Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « ... ».
- *Étape 2 : on initialise le processus, c'est-à-dire que l'on montre que la proposition est vraie au rang 0.*
  Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  [...]
- *Étape 3 : on montre que la proposition se transmet d'un rang au rang suivant.*
  Hérédité : Soit k un entier naturel fixé quelconque.
  On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire ....
  Montrons qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  [...]
- *Étape 4 : on conclut.*
  Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque : si la proposition est à montrer pour tout $n \geqslant 1$ (ou $n \geqslant 2$ ...), l'initialisation se fait pour $n = 1$ (ou 2 ...), et l'hérédité s'adapte aussi : le k est choisi supérieur ou égal à 1 (ou à 2 ...), mais toujours quelconque. Le reste de la rédaction ne change pas. (voir Exercice 3. 1.)

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.

Exemple 2 : Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme des $n+1$ premières puissances de 2 consécutives, c'est-à-dire $S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$.
Calculer S_0, S_1 et S_2, puis montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 2^{n+1} - 1$.

III. Récurrence double

Propriété: principe de récurrence double.

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n.

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ et } \mathcal{P}(1) \text{ sont vraies} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \Big(\mathcal{P}(k) \text{ et } \mathcal{P}(k+1)\Big) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+2) \end{cases}$ alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les n de $\mathbb{N}$.

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 1 + 2^n$.