Détermination de primitives et calcul d'intégrales.

I. Primitives

1) Qu'est-ce qu'une primitive ?

Définition.
Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.
On dit que F est une ***primitive*** de f si F est dérivable et $F' = f$.

Propriété.
Si F est une primitive de f sur $\mathcal{D}$, alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + C$ où C est un nombre réel, sont des primitives de f sur I, et toutes les primitives s'écrivent ainsi.

2) Trouver des primitives

a. Primitives usuelles, sommes et produit par un réel.

Si F et G sont des primitives de deux fonctions f et g, alors :
⋆ $F + G$ est une primitive de $f + g$ (car $(F+G)' = F' + G' = f + g$).
⋆ $2F$ est une primitive de $2f$; $0{,}5F$ de $0{,}5f$ ...etc ...: aF est une primitive de af (car ....).

Attention : ce n'est pas aussi simple avec un produit : $F \times G$ n'est pas une primitive de $f \times g$.
En effet, $(F \times G)' = F'G + FG'$ (et non $F'G'$).

Pour trouver des primitives de f et g, on peut reconnaître des formes, et utiliser les formules de dérivées correspondantes.

Attention : une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(|x|)$
une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ lorsque u ne s'annule pas est $x \mapsto \ln(|u(x)|)$

Pour $x < 0$, dériver $f : x \mapsto \ln(-x)$:

Exemple : $f(x) = 7x^2 + 3x + \frac{1}{x}$:

Exemple : cherchons les primitives de $f(x) = x(x^2-1)^3$.

Cette fonction est sous la forme d'une puissance, $(x^2-1)^3$, multipliée avec x, qui ressemble à la dérivée de $x^2 - 1$ à peu près.

	Primitives		*Dérivées*	
La formule que l'on utilise est donc :	$(u(x))^4$	$\xrightarrow{\text{a pour dérivée}}$	$4u'(x)(u(x))^3$	avec $u(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 2x$
On remplace $u(x)$ et $u'(x)$:	$(x^2-1)^4$		$4 \times 2x(x^2-1)^3$	$\div 8$
On ajuste le coefficient :	$\boxed{\frac{1}{8}(x^2-1)^4}$	$\xleftarrow{\text{a pour primitive}}$	$x(x^2-1)^3$	

Les primitives de f sont donc les fonctions $\boxed{x \mapsto \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + C}$ avec C dans $\mathbb{R}$.

Étapes de la méthode :

1. identifier la formule de dérivation à utiliser, et le $u(x)$, et l'écrire en 1ère ligne du « tableau »;

2. remplacer rigoureusement le $u(x)$ et le $u'(x)$, et le n le cas échéant ;

3. à partir du résultat de la formule, on cherche à retrouver la fonction de départ au bas de la colonne de droite, par des multiplications et des divisions par des nombres qui ne contiennent pas de x.
Si on n'y arrive pas, c'est que l'on s'est trompé de formule de départ, ce n'est pas grave, on réessaye avec une autre formule (ajuster le n éventuellement).

Attention : les opérations d'une ligne à l'autre doivent préserver le lien primitives-dérivées des colonnes. Donc on ne peut que multiplier ou diviser, par un nombre, pas de x, et pas d'addition ou soustractions !

Si la fonction à primitiver est une somme, primitiver séparément chaque terme (si besoin avec la méthode ci-dessus), puis ajouter les primitives obtenues.

Exemple : donner les primitives de la fonction f d'expression $f(x) = \frac{x}{(3x^2+7)^5} + e^{-3x+1}$.

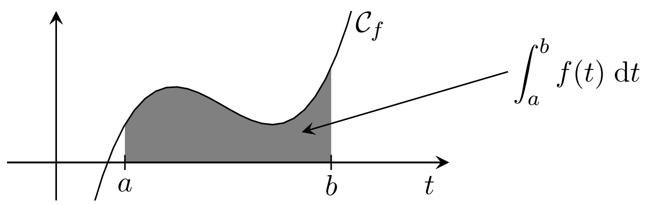
II. Intégrales

$\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est un nombre appelé ***intégrale de la fonction*** f ***entre*** a ***et*** b.

Il représente l'aire sous la courbe de f entre les abscisses a et b.

En notant F une primitive de f, alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)}.$$



Exemple : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ (*la présentation qui suit est à appliquer systématiquement !*) :

• $t \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ (*si elle est très simple on peut sauter cette étape, mais si elle est compliquée cela peut être plus long !*)

• Donc
$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}\ln(1+1^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+0^2) = \tfrac{1}{2}\ln(2)$$

Propriété de linéarité : $\boxed{\forall\lambda \in \mathbb{R} : \int_a^b (f+\lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g}$.

Exemple : $\displaystyle\int_1^3 2\ln(x) - 7x^2\ \mathrm{d}x = \ldots$