Polynômes.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

$P = -3 + 5X$ et $Q = 4 - 3X + X^2$: déterminer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

☞ Exercice 2.

Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = 2X^4 + X^3 - X^2 + X + 1$ et $B = 2X^2 - X - 2$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Quel est le reste dans la division euclidienne de X^n par $X + 1$?

2. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$.

☞ **(a)** On suppose que le reste dans la division euclidienne de P par $X - 1$ est 6 et que le reste dans la division de P par $X - 2$ est 8. Quel est le reste dans la division de P par $(X - 1)(X - 2)$?

★ **(b)** Généralisation : si $a \neq b$, donner le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de a, b et $P(a)$ et $P(b)$.

★ **3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P = X^{n+1} - 2X^n + X + 1$.

(a) Déterminer le reste R dans la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)$.

(b) En déduire le quotient Q de cette division.

Exercice 4.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par $X - 1$, puis par $(X - 1)^2$.

Exercice 5.

Soit un entier n supérieur ou égal à 3.

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 + 2X - 3$. (*on commencera par déterminer les racines de* $X^2 + 2X - 3$)

2. Application : soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^2 + 2A - 3I$.
En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

(b) Calculer A^n.

★ Exercice 6.

Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$: **(a)** $(P')^2 = 4P$ **(b)** $P(X^2) = (X^2 + 1)P$.

☞ Exercice 7.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$.
Déterminer P_n'.

★ Exercice 8.

L'objectif est de démontrer la formule de Leibniz. Soient P et Q des polynômes.

1. Démontrer qu'elle est vraie pour $n = 1$.

2. Soient n un entier et k un entier entre 0 et n : calculer la dérivée de $P^{(k)}Q^{(n-k)}$.

3. Démontrer la formule de Leibniz par récurrence.

Exercice 9.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $n > 0$, et soit a dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $P(a) > 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], P^{(k)}(a) \geqslant 0$.
Montrer que P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

★ Exercice 10.

Soit le système $(\mathcal{S}) \begin{cases} 3x + 4xy + 3y = -5 \\ x - 2xy + y = 5 \end{cases}$.

1. Déterminer les valeurs de la somme $s = x + y$ et du produit $p = xy$ lorsque (x, y) est solution de $(\mathcal{S})$.

2. Résoudre $(\mathcal{S})$.

Exercice 11.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, montrer que les racines complexes du polynôme $1 - X^n$ sont simples.

Exercice 12.

Soit n un entier supérieur ou égal à 4, on note $P_n = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.
Montrer que P_n admet une racine triple.

☞ Exercice 13.

Soit $P = -9 + 18X - 5X^2 - 8X^3 + 4X^4$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $(X - 1)^2$

2. En déduire toutes les racines réelles de P avec leurs multiplicités.

Exercice 14.

☞ **1.** Factoriser les polynômes suivants au maximum dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

- **(a)** $P = X^4 + X^2 - 2$;
- **(b)** $Q = X^5 + 5X^4 - 5X^3 - 25X^2 + 40X - 16$;

2.

- **(a)** Rappeler l'ensemble des solutions complexes de l'équation $z^n = 1$ puis de l'équation $z^n = \rho e^{i\theta}$.
- **(b)** En déduire la factorisation de $R = X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.
- ★ **(c)** Factoriser au maximum $S = X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.