Polynômes

Dans ce chapitre, nous étudierons les polynômes formels : ils généralisent la notion de fonction polynomiale que nous avons déjà étudiée à des polynômes d'autres objets mathématiques (matrices, nombres complexes ...). Nous ne les étudierons pas en tant que fonction, avec des graphiques, mais en tant qu'objet, outil de calcul. Mais bien sûr, tout ce que nous avons vu sur les fonctions polynomiales reste valable, et s'étend dans une certaine mesure à ces polynômes formels.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités

Définition.

Un ***polynôme à coefficients dans*** $\mathbb{K}$ est une expression de la forme $P = a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ noté aussi $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ où n est un entier naturel et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
Les nombres a_0, a_1, ... sont les ***coefficients de*** P.
L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Exemples : $7 + 3X$; 3 ; $-4 + 7X - \frac{3}{4}X^{12}$ ... sont des polynômes à coefficients réels.

Utilisation : un polynôme est une expression, dans laquelle on peut remplacer X par divers objets mathématiques : une matrice carrée, un nombre réel, un nombre complexe ... tant que les opérations de multiplication par un scalaire, de produit et de somme de ces objets sont bien définies.
Par exemple, avec $P = -2 + 5X + 3X^2$:

- si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $P(A) =$
- $P(-5) =$
- $P(2i) =$

Lorsque le X est remplacé par une variable x réelle, le polynôme devient une ***fonction polynomiale*** définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$.

1) opérations sur les polynômes

Soient deux polynômes non nuls : on note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_kX^k$.
On supposera $n \leqslant m$.
On définit les polynômes suivants :

- **la somme :** $P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \ldots + (a_n + b_n)X^n + \ldots + b_mX^m$
- **le produit par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{K}$ **:** $\lambda P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k)X^k$
- **le produit de** P **par** Q **:** $P \times Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k$ avec $c_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} a_pb_{k-p}$
- **la composée de** P **par** Q **:** $P \circ Q = P(Q(X)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(Q(X))^k$

Explications du produit sur un exemple : $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$.

$PQ = (a_0 + a_1X + a_2X^2)(b_0 + b_1X + b_2X^2)$

$=$

$=$

Le coefficient de X^2 est .... cela correspond bien à ...

Exemples : Soient $P = 1 - 5X + 3X^2$ et $Q = 2X + X^3$.

$P + Q = \dots$ $7P = \dots$

$PQ = \dots$ $P \circ Q = \dots$

2) degré

Définition.

Le ***degré*** d'un polynôme non nul est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.
On note $d^\circ P$ (ou $\deg(P)$) le degré du polynôme P.

Si le degré de P est n, alors :
$\star$ le terme $a_n X^n$ est le ***terme dominant***, a_n est le ***coefficient dominant*** ;
$\star$ si $a_n = 1$, alors P est dit ***unitaire*** (ou ***normalisé***).

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exemples : -2 est un polynôme de degré ....

$-1 + 3X$ .... Son coefficient dominant est ....

$11iX + X^3$ est dans ....

Remarque : les polynômes de degré 0 sont appelés ***polynômes constants***.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et les mêmes coefficients.

Opérations et degré : $\boxed{\deg(\lambda P) = \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0 \text{ (et } -\infty \text{ si } \lambda = 0)}$

$\boxed{\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P);\deg(Q)\}}$ et $\boxed{\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)}$ et $\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)}$.

Attention : pour la somme, le degré n'est pas toujours le maximum des deux :

....

....

3) diviseurs et multiples

Définition.

Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$.
On dit que A ***est un multiple de*** B (ou B divise A) si il existe un polynôme Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On peut noter $B|A$.

Exemples :

- $X - 2$ divise $X^2 - 4$ car ....
- le polynôme nul est ....
- un polynôme constant (non nul) ....

Propriété : division euclidienne.

Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul.
Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) avec $\deg(R) < \deg(B)$ tel $A = BQ + R$.
Q est le ***quotient*** et R le ***reste*** dans la ***division euclidienne*** de A par B.

Remarque : A est un multiple de B si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

Méthode : pour trouver Q et R on pose la division euclidienne de A par B.
Par exemple, avec $A = X^5 + 2X^3 - 3X^2 + X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$:

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 0X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X - 1 & X^2 - X + 1 \\ \hline \end{array}$$

D'après la division ci-contre :

$A = \dots$

II. Dérivation

1) définition

Définition.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle ***polynôme dérivé*** de P et on note P' le polynôme $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ autrement dit $P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \dots + na_nX^{n-1}$.

Exemple : si $P = -7 + X - 6X^3 + 3X^4$, alors $P' = \dots$.

Propriété.

Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $(P+Q)' = P' + Q'$ et $(\lambda P)' = \lambda P'$ et $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Bilan : les formules de dérivées sur les fonctions sont toujours valables pour la dérivation des polynômes.

2) dérivées d'ordre supérieur

Définition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on définit par récurrence les dérivées successives de P :
$P^{(0)} = P$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$. (en particulier $P^{(1)} = P'$; $P^{(2)} = P''$)

Exemple : on note $P = -3 + 5X + 11X^2 - 5X^4$, calculer les dérivées successives de P.

Remarques importantes :

- si $\deg(P) = n$, alors : $\deg(P^{(k)}) = \dots$
- $(P+Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$ et $(\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$

Théorème : Formule de Leibniz.

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Démonstration : se fait par récurrence, voir l'**exercice 6**.

3) Formule de Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré n :

$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots + a_n X^n$

Théorème : Formule de Taylor.

Soit P un polynôme dans $\mathbb{K}_n[X]$:

- $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$
- pour tout a de $\mathbb{K}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$.

Exemple : un étudiant mal organisé a perdu son énoncé et ne sait donc plus de quel polynôme traite son exercice.
Mais il avait auparavant calculé les dérivées successives et les avait évaluées en 0.
Sur sa feuille, il a $P(0) = 7$, $P'(0) = 11$, $P''(0) = -12$, $P^{(3)}(0) = \frac{9}{2}$, $P^{(4)}(0) = -18$ et $P^k(0) = 0$ pour $k \geqslant 5$.
Quel était le polynôme P ?

Pour obtenir la deuxième formule, on applique la première au polynôme Q défini par $Q = P(X+a)$.

III. Racines

Définition d'une racine.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une ***racine*** de P si $P(\alpha) = 0$.
(autrement dit α annule la fonction polynomiale associée à P)

1) racine et divisibilité

Propriété.

α est une racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P.

Démonstration :

2) Multiplicité d'une racine

Définition : multiplicité d'une racine.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et α une racine de P.
On appelle ***multiplicité de la racine*** α l'unique entier r tel que $(X - \alpha)^r$ divise P et $(X - \alpha)^{r+1}$ ne divise pas P.

Propriété (caractérisations de la multiplicité d'une racine).

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:
- α est une racine de P de multiplicité r si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^r Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$;
- α est racine de P de multiplicité r si et seulement si $\forall k \leqslant r - 1, P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

En particulier, α racine double signifie que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$.

Exemples :
- 0 est une racine triple de $X^5 + 2X^3$,

  en effet :
- 2 est racine simple de $X^3 - 4X$:

  en effet,
- soit $P = X^4 + 5X^3 + 6X^2 - 4X - 8$, on cherche l'ordre de multiplicité de la racine -2.

Propriété.

Soit P un polynôme non nul.
On suppose que α_1, α_2, $\dots \alpha_n$ sont des racines distinctes de P.
Et on notera r_k l'ordre de multiplicité de α_k.
Alors $\prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{r_k}$ divise P.

Propriété (conséquence).

Le degré d'un polynôme non nul est supérieur ou égal au nombre total de ses racines comptées avec leurs multiplicités.

Application : pour montrer qu'un polynôme de degré n est nul, on peut montrer qu'il a au moins $n+1$ racines.

Exemple célèbre : soit P un polynôme tel que $P(X+1) = P(X)$, montrons que P est constant.

On pose $Q = P - P(0)$.

IV. Polynômes scindés et factorisations

Définition.

Lorsqu'il y a égalité entre le degré et le nombre des racines comptées avec leurs multiplicités, on dit que le polynôme est ***scindé***, et alors le polynôme P s'écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{r_k}$, où les α_k sont les racines distinctes et r_k leurs ordres de multiplicité, et $\lambda \in \mathbb{K}$ est le coefficient dominant.

Par exemple, le polynôme $P = -2X^3 + 12X^2 - 18X$ est scindé sur $\mathbb{R}$:

1) factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème de d'Alembert Gauss.

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a au moins une racine.

Propriété (conséquence).

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$.
Si $P \in \mathbb{C}[X]$, alors P se décompose en produit de facteurs de degré 1 unitaires dans $C[X]$ de la forme $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{r_k}$ où les α_k sont les racines distinctes de P et r_k leurs multiplicités, et λ le coefficient dominant.

Exemple : $P = 4X^4 + 8X^2$

2) factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Propriété.

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
Si α est racine de P, alors $\bar{\alpha}$ l'est aussi, avec la même multiplicité.

Conséquence : si P est à coefficients réels, et α une racine complexe de P, alors $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ divise P.
Or $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ est à coefficients réels, en effet :

$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

La meilleure factorisation possible d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=0}^{n} (X-\alpha_k)^{r_k} \prod_{k=0}^{m} (X^2+p_kX+q_k)^{r'_k}$$ avec λ coefficient dominant, n et m dans $\mathbb{N}$
α_k, p_k et q_k dans $\mathbb{R}$ et $p_k^2 - 4q_k < 0$

3) exemples

Factorisons au maximum dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$: $P = 2X^3 + 6X^2 + 8X + 4$ et $Q = X^5 + 32$

4) relations coefficients racines

Propriété.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé de degré n.
On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines, éventuellement égales.
Alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.
En particulier pour un polynôme de degré 2 noté $aX^2 + bX + c$:
la somme des deux racines est $-\frac{b}{a}$ et le produit est $\frac{c}{a}$.

Cas du degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ et on note α_1 et α_2 ses racines, ainsi $P = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$.

En particulier : α_1 et α_2 sont racines de $X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_1 \times \alpha_2$.

Méthode : si l'on cherche deux nombres complexes dont on connaît la somme s et le produit p, alors on étudie le polynôme $X^2 - sX + p$: les deux racines sont les deux nombres cherchés.

Exemple : déterminer deux nombres dont la somme fait $-\frac{5}{6}$ et le produit $-\frac{7}{2}$.