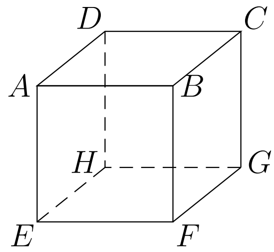
Plans, droites et sphères dans l'espace.

Exercice 1.



1. Sur le cube ci-contre, les droites (BF) et (CG) sont parallèles, ainsi que les droites .... et .....
Les droites (DH) et (BF) sont coplanaires, ... et .... aussi.
Les droites (AE) et (BC) sont non coplanaires, de même que .... et .....

2. La droite .... est sécante au plan .... au point .....
La droite (CG) est contenue dans le plan (BCF), de même, la droite ..... est contenue dans le plan ...... et la droite .... est strictement parallèle au plan .....

☞ Exercice 2.

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan dans chacun des cas suivants :

1. plan passant par $A(1,1,1)$, $B(2,1,-1)$ et $C(1,0,1)$;

2. plan passant par $A(-2,1,-3)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3. plan de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et qui passe par $A(0,-1,-3)$.

☞ Exercise 3.

In each case, find a parametric and general equation of the straight line d :

1. d passes through the points $A(1,2,-3)$ and $B(0,-1,2)$;

2. d passes through the point $C(3,1,-1)$ and has a direction vector $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3. d is the intersection of the plane $\mathcal{P}_1 : \ 3x - y + z - 3 = 0$ and $\mathcal{P}_2$ passing through $D(0,0,1)$ and of normal vector $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.

1. Soit la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1,-2,-1)$ et $B(3,-5,-2)$.
Donner un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.

2. Soit la droite $\mathcal{D}'$ ayant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Démontrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $4x + y + 5z + 3 = 0$.

(a) Démontrer que $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{D}$.

(b) Démontrer que $\mathcal{P}$ coupe la droite $\mathcal{D}'$ en un point C dont on déterminera les coordonnées.

4. Soit la droite $\mathcal{D}''$ passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires.

(b) Démontrer que $\mathcal{D}''$ coupe perpendiculairement $\mathcal{D}$ en un point E dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 5.

Soient les plans $\mathcal{P}_1 \ : \ x-2y-2z+1=0$ et $\mathcal{P}_2 \ : \ 2x+y-2z+2=0$.

1. Justifier que les deux plans sont sécants.

2. On note $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
Donner un point A appartenant à $\mathcal{D}$, ainsi qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

☞ Exercice 6.

Soient deux points $M(1,1,1)$ et $A(1,6,3)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

2. Déterminer les coordonnées de H' projeté orthogonal de M sur le plan contenant A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

☞ Exercice 7.

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct.

1. Soit $\mathcal{S} = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2+y^2+z^2-x-5y-3z+6=0\}$.
Démontrer $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

2. Vérifier que $\mathcal{S}$ contient $A(0,1,1)$ et déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en A.

Exercice 8.

On munit l'espace d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ et pour tout λ de $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble $\mathcal{S}_\lambda$ des points de coordonnées (x,y,z) tels que $x^2+y^2+z^2+\lambda^2 = 2\lambda(x+y)$.

1. Déterminer la nature de $\mathcal{S}_\lambda$.

2. Donner en fonction de λ la nature de l'intersection entre $\mathcal{S}_\lambda$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z=1$.

★ **3.** Démontrer qu'il existe deux plans, contenant chacun deux axes de coordonnées du repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ tangents à tous les ensembles $\mathcal{S}_\lambda$.

Exercice 9.

1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(2,3,0)$ et de rayon 10.

★ **2.** Déterminer le nombre de points d'intersection entre la droite (d) et la sphère $\mathcal{S}$ où (d) a pour équations cartésiennes $\left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=1 \\ 2x-y+3z=2 \end{array} \right.$.

Exercice 10.

Soit (S) un système de 2 équations et 3 inconnues.
Discuter des affirmations suivantes (toujours vraie ? possible dans certains cas ? impossible ?).

(a) Le rang de (S) est au maximum 2.

(b) Le système (S) a une infinité de solutions.

(c) L'ensemble des solutions du système (S) est une droite affine.

(d) Le système (S) est incompatible si et seulement si les deux équations sont celles de deux plans parallèles non confondus.

(e) Si le système (S) a une solution, alors il en a une infinité.

(f) Si les deux équations ont le même premier membre, alors le système (S) a une infinité de solutions.