Logarithme, exponentielle et puissances

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1. Démonstration de formules fondamentales pour ln.

On cherche ici à démontrer la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ (et au **2.**, les autres formules sur ln).

1. Soient a un réel strictement positif fixé, et f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax)$.

(a) Calculer $f'(x)$, et $f(1)$.

(b) En déduire que pour tout x strictement positif, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

★ **2.** En utilisant la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, désormais acquise pour tous a et b strictement positifs, démontrer : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

☞ Exercice 2.

1. Exprimer en fonction de ln(2) les nombres suivants :
$\ln(16)$; $5\ln(32) - 6\ln\left(\sqrt{2}\right)$; $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - 4\ln\left(\frac{1}{8}\right)$ et $\ln(72) - 2\ln(3)$.

2. Simplifier : $\ln\left(\frac{e^5}{5}\right) + \ln(5)$; $2\ln(7) - \ln\left(\frac{49}{e^3}\right)$; $\ln\left(\frac{e^5}{e^3}\right)$; $\ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

★ **4.** Calculer $A = \frac{7}{16}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2} - 1)$.

★ Exercice 3. Démonstration de formules avec exponentielle.

On cherche ici à démontrer les formules du cours $e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, en n'utilisant que la définition de l'exponentielle, et les formules et propriétés de ln.

1. Calculer $\ln(\exp(a + b))$ et $\ln(\exp(a) \times \exp(b))$. Que peut-on conclure ?

2. Par la même méthode, prouver que $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

☞ Exercice 4.

Écrire sous la forme la plus simple possible les nombres (ou expressions) suivant(e)s :

$A = e^{\ln(3)} + \ln(e^4)$

$B = e^{\frac{1}{2}\ln(9)}$

$C = 3\ln(e^{-3}) + \frac{1}{2}\ln(e^{10})$

$D = e^{1-2\ln(2)}$

$E = e^{-2\ln(5)} e^{2\ln(5)}$

★$F(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

☞ Exercice 5.

Résoudre les équations et inéquations suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition :

(a) $\ln(x) + \ln(x - 1) = 0$

(b) $e^{2x} = 7$

(c) $5e^{2x} \geqslant e^{-x}$

(d) $\ln(2x) \leqslant 10$

(e) $e^x = -2$

(f) $e^{-x} = \frac{1}{9}$

★ Exercice 6.

1. Résoudre l'équation $X^2 - 4X - 5 = 0$.

2. En déduire la résolution des équations suivantes :

(a) $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$

(b) $(\ln(x))^2 - 4\ln(x) - 5 = 0$

(c) $e^x - 4 = 5e^{-x}$

(d) $\ln(x - 3) + \ln(x - 1) = 3\ln(2)$

Exercice 7.

Résoudre dans $]0,+\infty[$ les équations suivantes : **(a)** $x^2 = x^x$ **(b)** $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

Exercice 8. puissances non entières

1. a est un nombre strictement positif.
Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une puissance de a :
$a^{0,3}a^{-1,2}$; $(a^{-6})^{\frac{1}{3}}$; $(\sqrt{a})^4$; $a^{-0,6}a^{0,6}$; $\dfrac{a^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{10}}}$.

2. Simplifier les expressions suivantes : $3^{3,2} \times 3^{0,8}$; $(0,5^{2,1})^2$; $\dfrac{7,3^{1,5}}{7,3^{0,5}}$; $\dfrac{6^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}$.

Exercice 9.

Soit $a > 0$.

1. Étudier la fonction $f_a : x \mapsto a^x$ (on pourra étudier différents cas).

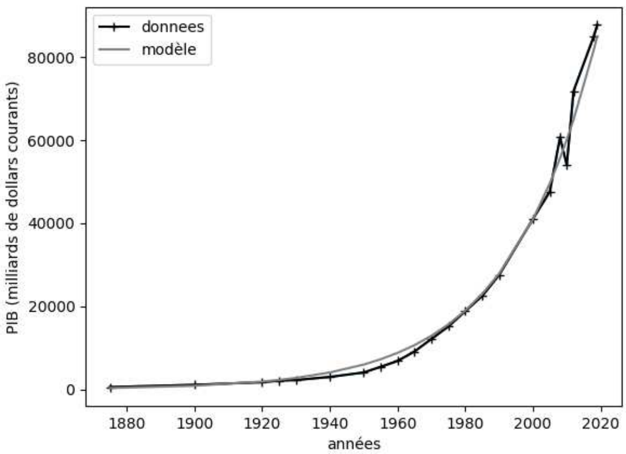
2. Montrer que si $a \neq 1$, la fonction f_a est bijective et déterminer sa fonction réciproque.

Remarque : $x \mapsto a^x$ est appelée exponentielle en base a. Sa réciproque est appelée logarithme en base a et est notée $\log_a$.
En particulier, on utilise souvent le logarithme en base 10, noté $\log$ pour $\log_{10}$: $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
Et la fonction logarithme népérien est le logarithme en base e : $\ln = \log_e$.

Exercice 10. croissances exponentielles. (calculatrice autorisée)

1. Au début du mois de mars 2020, le nombre de nouveaux cas de Covid-19 doublait tous les 4 jours environ. Cela correspond à une croissance exponentielle (visible sur les courbes). En notant $f(t)$ le nombre de cas à l'instant t, donné en jours à partir du 1er mars, on peut donc écrire $f(t) = \lambda e^{\frac{t}{\tau}}$.
Traduire le doublement tous les 4 jours par une équation vérifiée par τ et la résoudre.
En france, on a dénombré le 4 mars 73 nouveaux cas. Si rien n'avait été fait pour essayer de ralentir l'épidémie, combien y aurait-il eu de nouveaux cas le 1er mai (avec la même méthodologie de détection) ?

★ **2.** On remarque que l'évolution du PIB mondial suit une courbe exponentielle.
En 1900 il était d'environ 1100 milliards de dollars, et en l'an 2000, environ 41 000 milliards, et en 2019 environ 87 000 milliards.
On modélise le PIB mondial en fonction du temps par la fonction $f(t) = \lambda e^{\frac{t}{\tau}}$, donné en milliards de dollars, où t représente les années depuis 1900.



(a) Déterminer une approximation de τ.

(b) Combien d'années sont-elles nécessaires pour doubler le PIB ?

(c) La consommation mondiale d'énergie primaire suit la même évolution que la courbe du PIB. En 2013, cette consommation était de 158 000 TWh.
On estime que l'énergie que le soleil émet vers la terre est environ $1,5\times10^9$TWh. Si l'évolution mondiale se poursuit ainsi, en quelle année est-ce que l'énergie du soleil ne satisfera plus les besoins de l'humanité ?